تقابل استراتژی بین دولت و بانک مرکزی در چارچوب بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه
(کاربردی از بازی‌های دیفرانسیلی خطی درجه دوم)

داود محمودی‌نیا [1]، جکوب انجوردا [2]، رحیم دلالی اصفهانی [3]،
رسول بخشی‌دستجردی [4]، مجید فخار [5]

تاریخ دریافت: ۹۴/۰۴/۱۵ تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۴/۰۸

چکیده

هدف این مطالعه بررسی تقابل استراتژی بین دولت و بانک مرکزی در اقتصاد ایران است. برای این منظور با استفاده از روش بازی‌های پویای دیفرانسیلی و تعادل نش در چارچوب بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه، به‌دنبال دستیابی به سطح هدف مطلوب برای متغیرهایی از جمله بدهی، کسری بودجه، پایه پول و چگونگی رفتار سیاست‌گذاران برای دست‌یابی به این اهداف می‌باشیم. شبیه‌سازی مدل‌های تعادلی نشان می‌دهد که در بازی‌های همکارانه نسبت به بازی‌های غیرهمکارانه، بدهی تعادلی در سطح پایین‌تر و سرعت همگرایی به سمت تعادل در سطح بالاتری قرار دارد. همچنین در بازی همکارانه

---

۱. دکتری اقتصاد، دانشگاه اصفهان (نویسنده مسئول) Davoud.mahmoudinia@gmail.com
۲. استاد اقتصاد، دانشگاه تیلبرگ، هلند J.C.Engwerda@uvt.n
۳. استاد اقتصاد، دانشگاه اصفهان rateofinterest@yahoo.com
۴. دانشیار اقتصاد، دانشگاه اصفهان bakhshirasul@gmail.com
۵. دانشیار ریاضی، دانشگاه اصفهان fakhar@sci.ui.ac.ir

نسبت به بازی غیرهمکارانه، انتشار پول کمتر و کسری بودجه کمتری در بلندمدت برای تثبیت بدهی مورد نیاز است. همچنین زمانی که بازیکنان نااطمینانی نسبت به آینده داشته باشند و این نااطمینانی را در رفتار خود لحاظ کنند، آنگاه این بازیکنان سعی می‌کنند تا با انتخاب پارامترهای ریسک گریز، به طور فعال‌تری به این نااطمینانی‌ها واکنش نشان دهند. این موضوع سبب می‌شود بدهی در سطح پایین‌تری تثبیت شود.

واژه‌های کلیدی: نظریه بازی‌های دیفرانسیلی، بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه، تعادل نش، سیاست پولی و مالی.

طبقه بندی JEL : C71: C72 :E52: E62: O5

۱. مقدمه

در طی دهه‌های اخیر، تقابل استراتژیِ بین دولت و بانک مرکزی، به‌عنوان یک موضوع مهم و کلیدی در میان نظریه‌پردازان اقتصادی تلقی شده است. اقتصاددانان در کشورهای مختلف در تلاش بودند تا با استفاده از روش‌های تحلیلی متفاوت، این موضوع را مورد بررسی قرار دهند که تحت کدام دسته از سیاست‌های پولی و مالی، می‌توان به یک سطح باثبات و پایدار در متغیرهای مهم کلان اقتصادی دست یافت. موضوع دیگری که مطرح می‌شود این است که برای دست‌یابی به اهداف مورد نظر، سیاست‌گذاران پولی و مالی از چه نوع قاعده بازی و چه ابزار و اطلاعاتی استفاده می‌کنند.

تسلط دولت بر بانک مرکزی در اقتصاد ایران موضوعی است که همواره مورد توجه پژوهش‌گران اقتصاد ایران بوده است. روند درحال رشد پایه پولی در ایران ازطریق انباشت بدهی دولت و آثار تورمی آن می‌تواند گویای این نوع رابطه بین دولت و بانک مرکزی باشد. یکی از سؤالاتی که مطرح است این است که درصورت وجود کدام رابطه، اهداف اقتصاد کلان قابل دستیابی است؟ آیا تغییر رویه موجود به سمت استقلال تصمیمات طرفین از یکدیگر به‌گونه‌ای که هرکدام کاملاً مستقل از هم اهداف خود را محقق نمایند، می‌تواند شرایط بهتری را فراهم نماید یا اینکه طرفین به صورت تعاملی و ازطریق همکاری متعهد به اجرای یک استراتژی مشترک شوند؟ این موضوعی است که قصد داریم در این مطالعه به آن بپردازیم.

یکی از روش‌هایی که نقش مهمی در تجزیه و تحلیل تقابل استراتژیک بین مقام پولی و مقام مالی ایفا می‌کند، روش تحلیلی براساس نظریه بازی‌هاست[1]. نظریه بازی‌ها، راه حل رسمی برای تجزیه و تحلیل تقابل میان گروهی از بازیکنان عقلایی که به طور استراتژیک رفتار می‌کنند، می‌باشد. این بازیکنان می‌تواند شامل بنگاه‌ها، خانوارها، بانک‌ها، دولت و غیره باشند. بازیکنان در این نوع از بازی‌ها در تلاش هستند تا با انتخاب بهترین استراتژی

---

۱. نظریه بازی‌ها با انتشار کتاب" تئوری بازی و رفتار اقتصاد" در سال ۱۹٤٤ توسط فن نیومن و مورگن اشتاین به یک رشته تخصصی تبدیل شد. سپس این نظریه دربین سال‌های ۱۹۵۰–۱۹۵۳ توسط جان نش توسعه داده شد.

در مقابل رقیب، بهترین پیامد تعادلی را کسب کنند. در اقتصاد کلان مدرن، محققین سعی می‌کنند تا از این ابزار برای تجزیه و تحلیل سیاست‌های بهینه استفاده کنند. برای ذکر چند نمونه مهم، کیدلند و پرسکات[1] (۱۹۷۷) در چارچوب نظریه بازی‌ها، نشان دادند که سیاست‌گذاری دولت درگیر با مسئله ناسازگاری زمانی[2] است. سارجنت و والاس[3] (۱۹۸۱) در چارچوب نظریه بازی استاکلبرگ، نشان دادند که سیاست‌گذار پولی نمی‌تواند کنترل دائمی بر روی تورم داشته باشد و این موضوع زمانی اتفاق رخ می‌دهد که سیاست مالی غالب بر سیاست پولی باشد. بارو و گوردون[4] (۱۹۸۳) این موضوع را اثبات کردند که سیاست‌گذاری صلاحدیدی در مقابل سیاست‌گذاری قاعده‌مند، سبب افزایش تورم و تورش تورمی در جامعه می‌شود. روگوف[5] (۱۹۸۵) نشان داد که سیاست پولی باید به یک بانک مرکزی مستقل محافظه‌کار که اهمیت بیشتری به تورم می‌دهد، محول شود. از این رو در تعادل، محافظه کاری بانک مرکزی سبب ایجاد تورش تورمی کمتر می‌شود. والش[6] (1995) با بیان دیدگاهی درمقابل دیدگاه روگوف، بیان کرد که سیاست پولی به جای آنکه به یک بانک مرکزی مستقل و محافظه کار داده شود، باید در قراردادی بین دولت و بانک مرکزی مشخص شود. آلسینا و تابلینی[7] (۱۹۸۷) در چارچوب تئوری بازی‌ها به بررسی منبع ناسازگاری زمانی در سیاست‌های پولی و مالی پرداختند. آنان در چارچوب نظریه بازی نشان دادند که اگر سیاست پولی و مالی باهم هماهنگ نباشند، تعهدات الزام آور نسبت به قواعد پولی، لزوماً سبب بهبود رفاه نمی‌شود. دیکسیت و لامبرتی[8] (۲۰۰۰) در چارچوب نظریه بازی نشان دادند که رهبری سیاست مالی، به طور معمول سطح محصول

---

1. Kydland and Prescott

۲ . تفاوت بین بهینه بودن بر اساس گذشته و بهینه بودن بر اساس آینده را ناسازگاری زمانی گویند. همچنین سیاستی که در زمان t بهینه محسوب می‌شود، اگر بهینه‌سازی مجددی در زمان t+n صورت گیرد و دلالت بر سیاست بهینه دیگری داشته باشد، آن سیاست دارای ناسازگاری زمانی است (اسنودن و همکاران، 1994).

3. Sargent and Wallace
4. Barro and Gordon
5. Rogoff
6. Walsh
7. Alesina and Tabellini
8. Dixit and Lambertini

مطلوب تری نسبت به رهبری پولی ایجاد می‌کند و همچنین مسئله ناسازگاری زمانی سیاست پولی می‌تواند ازطریق تعهد به قاعده حل شود. کای[1] (۲۰۰۴) نشان داد که در بازی نش بین سیاست‌گذار مالی و پولی که یک نوع بازی غیرهمکارانه می‌باشد، تضاد در ارتباط با اندازه مناسب شکاف محصول، منجر به نوسانات بیش از اندازه نرخ بهره و نرخ ارز می‌شود. چنین نوساناتی ممکن است ثبات مالی را برای یک اقتصاد به خطر بیاندازد.

در طی سالیان اخیر، بحران‌های مالی جهانی باعث انباشت سریع بدهی دولت‌ها در بسیاری از کشورها شد. این موضوع نگران کننده سبب شد تا برخی از محققین که تقابل استراتژیک بین سیاست‌گذار پولی و مالی را مورد بررسی قرار می‌دادند، به دنبال پاسخ به این سوال باشند که چگونه دولت و بانک مرکزی با استفاده از ابزارهای در دسترس، می‌توانند بدهی را درسطح مطلوب تثبیت کنند (اسکولونا[2] (۲۰۱۰) ، دویی و همکاران[3] (۲۰۱۱)، کالیگن[4] (۲۰۱۲)، ون چن[5] (۲۰۱۴)). بدهی‌های دولت، ناشی از انباشت کسری بودجه و نرخ بهره مربوط به بدهی معوقه می‌باشد و افزایش مداوم کسری بودجه می‌تواند بدهی انباشت شده را در طول زمان افزایش دهد و اثرات زیان باری را بر اقتصاد و حجم فعالیت اقتصادی هر کشور، به‌خصوص در کشورهای درحال توسعه داشته باشد. از سوی دیگر، افزایش کسری بودجه و ضعف در سیاست‌های مالی می‌تواند منتهی به افزایش حق الضرب پول توسط بانک مرکزی شده و نتیجتاً افزایش تورم انتظاری را درپی داشته باشد. توگو[6] (۲۰۰۷) بیان می‌کند که ساختار بدهی ضعیف می‌تواند سبب تغییر مسیر جاری سیاست‌های دولت شود و دولت را مجبور کند تا برای جبران تعهدات ناشی از بدهی، از برخی مخارج برنامه‌ریزی شده خود صرف‌نظر کند. در بسیاری از کشورها، ازجمله ایران، اندازه کسری بودجه و پایه پولی که نقش مهمی در تعیین بدهی دولت دارد، توسط دولت و بانک مرکزی که به‌طور کلی دارای اهداف و محرک‌های متفاوتی هستند تعیین می‌شود.

---

[1] .Kai
[2] .Escolano
[3]. .Doi et al
[4]. Collignon
[5] .Wei Chen
[6].Togo

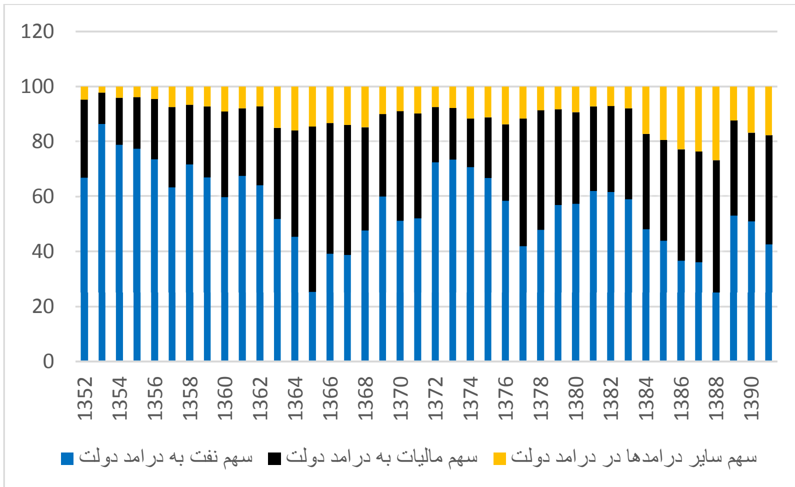
اقتصاد ایران در طی دهه‌های اخیر همواره شاهد نوسانات زیاد در سطح بدهی، تورم و کسری بودجه، بوده است. یکی از دغدغه‌های مهم سیاست‌گذران در کشور این است که چگونه می‌توان به سطح پایدار و با ثبات از این متغیرها دست یافت.

برای این منظور هدف ما از این مطالعه آن است تا تقابل استراتژی بین دولت و بانک مرکزی به‌عنوان دو بازیکن در اقتصاد ایران، که دارای ساختار اطلاعاتی و اهداف متفاوت هستند را در چارچوب نظریه بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم. در ادامه به‌دنبال پاسخ به این سوال هستیم که کدام قاعده بازی بین دولت و بانک مرکزی سبب دستیابی به پایین‌ترین سطح مطلوب بدهی می‌شود. برای این منظور در بخش دوم به بررسی آماری برخی از متغیرهای کلان در اقتصاد ایران خواهیم پرداخت. در بخش سوم چارچوب مدل‌سازی و طراحی مدل در قالب بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش‌های چهارم و پنجم، مسیرهای تعادلی در بازی‌های مختلف را اثبات می‌کنیم. در بخش ششم، پارامترهای مورد استفاده در مدل را معرفی و سپس به شبیه‌سازی معادلات تعادلی خواهیم پرداخت. در نهایت، جمع‌بندی نهایی و ارائه توصیه‌های سیاستی انجام خواهد گرفت.

۲. روند متغیرهای کلان اقتصادی در ایران

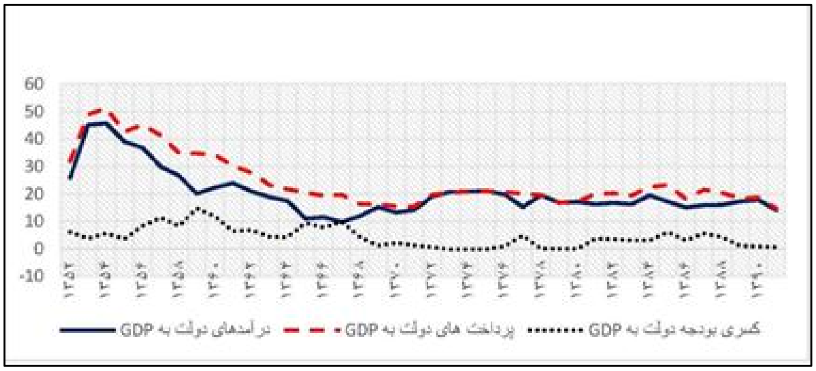
کسری بودجه یک متغیر مهم برای ارزیابی وضعیت اقتصادی یک کشور تلقی می‌شود. انباشت کسری بودجه در طول سال‌های مختلف باعث ایجاد و انباشت بدهی برای دولت می‌شود. ملاحظه روند دریافت‌ها و پرداخت‌های بودجه در اقتصاد ایران از انباشت بدهی مستمر حکایت می‌نماید. نمودار ۱ سهم بخش‌های مختلف در درآمد دولت را نشان می‌دهد. همان‌طور که از نمودار مشخص است، در طی چهار دهه اخیر، بخش مهمی از درآمدهای دولت از طریق درآمدهای نفت تامین شده است. به‌طور متوسط از سال ۱۳۵۲ تا سال ۱۳۹۱ ، حدود ۵۶ درصد از درآمدهای دولت، ناشی از درآمدهای نفتی و حدود ۳۲ درصد هم ناشی از درآمدهای مالیاتی بوده است. بیشترین سهم نفت در درآمدهای دولت

در دهه پنجاه به میزان ۷۳ درصد و کمترین مربوط به دهه هشتاد و دهه شصت به ترتیب به میزان ۴۸ و ۴۹ درصد می‌باشد.



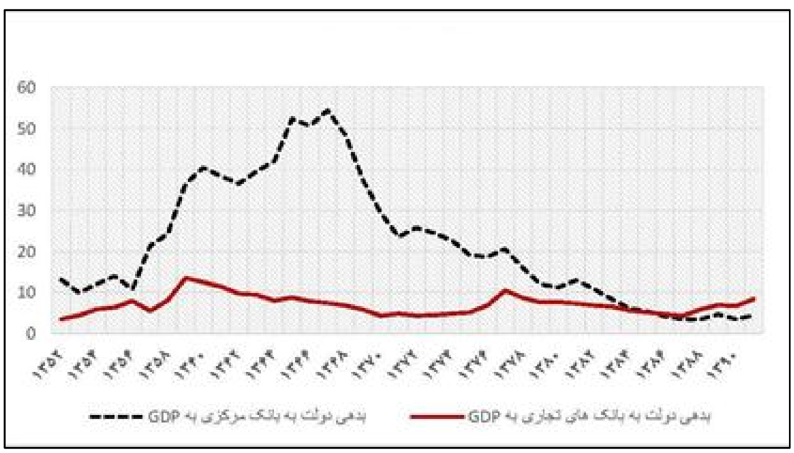
نمودار ۱. سهم بخش‌های مختلف در درآمد دولت

نمودار ۲ روند درآمدها، پرداخت‌ها وکسری بودجه دولت را نشان می‌دهد. در اکثر سال‌ها، پرداخت‌های دولت بیش از درآمدهای دولت در اقتصاد ایران بوده است و این موضوع نشان دهنده کسری بودجه در اقتصاد ایران در طی سال‌های مختلف است. در دهه پنجاه و شصت، که همزمان با شروع انقلاب اسلامی و هشت سال جنگ تحمیلی می‌باشد، نسبت پرداخت‌ها به درآمدها بیش از دهه‌های دیگر است. این افزایش در کسری بودجه، سبب افزایش سطح بدهی‌های دولت و انباشت آن در طی دوره‌های مختلف شده است.



نمودار ۲. روند درآمدها، پرداخت‌ها و کسری بودجه دولت

نمودار ۳ نشان دهنده‌ی، بدهی‌های دولت به بانک مرکزی و شبکه بانکی می‌باشد. همان‌طور که از نمودار مشخص است، در اکثر سال ها در طی دوره زمانی ۱۳۵۲-۱۳۹۱، بخش زیادی از بدهی دولت، مربوط به بدهی دولت به بانک مرکزی می‌باشد. در دهه پنجاه و شصت، که کسری بودجه در بالاترین حد خود قرار داشته است، بدهی دولت به بانک مرکزی هم در بالاترین حد خود بوده است. اما از سال ۱۳۸۶ به بعد، بدهی دولت به بانک‌های تجاری از بدهی دولت به بانک مرکزی پیشی گرفته است.



نمودار ۳. روند بدهی دولت به بانک مرکزی و بانک‌های تجاری

روند این سه نمودار نشان می‌دهد که در سال هایی که درآمد های نفتی دولت کاهش یافت، ماشاهد افزایش کسری بودجه در کشور و در نتیجه افزایش بدهی دولت به شبکه بانکی و انتشار پول توسط بانک مرکزی بوده‌ایم. از این‌رو در این مطالعه می‌خواهیم نشان دهیم که با ساختار حال حاضر کشور، چگونه می‌توان در قالب بازی بین سیاست‌گذار پولی و مالی، بدهی را در سطح مطلوب تثبیت کرد.

۳. مدل پایه‌ای

برای بررسی تقابل استراتژیک بین مقام پولی و مالی، از مدلی که توسط تابلینی (۱۹۸۶) ارائه شده استفاده می‌کنیم. مدل ارائه شده توسط تابلینی، یک نوع بازی پویای دیفرانسیلی[۱] است که در این نوع از بازی، دولت و بانک مرکزی با استفاده از ابزار سیاست پولی و مالی، در تلاش برای رسیدن به سطح مطلوب از بدهی در وضعیت تعادلی می‌باشند. در گام اول، به بررسی قید بودجه دولت که در آن ارتباط بین کسری بودجه، بدهی دولت و انتشار پول را نشان می‌دهد می‌پردازیم. قید بودجه دولت در فرم ساده می‌تواند به‌صورت معادله (۱) نشان داده شود (لی[۲] ۲۰۱۰، آرله و همکاران[۳] ۱۹۹۷، سارجنت و والاس[۴] ۱۹۸۱):

$$D_t = (1 + i_t)D_{t-1} + G_t - T_t - \Delta M_t \qquad (1)$$

که در این مدل D_t بدهی دولت در زمان t، G_t مخارج دولت و T_t درآمد مالیاتی دولت می‌باشد. تفاضل مخارج دولت از درآمد مالیاتی به‌عنوان کسری بودجه دولت شناخته می‌شود. M_t پایه پولی بانک مرکزی و i_t نرخ بهره اسمی و Δ نیز نشان دهنده تفاضل مرتبه اول می‌باشد. این قید نشان می‌دهد که کسری بودجه دولت ازطریق انتشار بدهی و انتشار

---

۱. تئوری بازی‌های دیفرانسیلی توسط ایساکس (۱۹۶۵) مطرح شد و این تئوری ارتباط بسیار نزدیکی با تئوری‌های کنترل بهینه دارد. مسئله بازی‌های دیفرانسیلی تعمیمی از تئوری کنترل بهینه را ارائه می‌دهد که در آن بیش از یک کنترل کننده یا بازیکن وجود دارد. بازی‌های دیفرانسیلی از لحاظ مفهومی دارای پیچیدگی بیش‌تری نسبت به مسئله کنترل بهینه است. در بازی‌های دیفرانسیلی انواع مختلف راه‌حل‌ها مانند مینی‌ماکس، نش، بهینه پرتو با احتمالات از نوع بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه و غیره وجود دارد. برای مطالعه بیشتر در ارتباط با تئوری بازی دیفرانسیلی به انجوردا (۲۰۰۵) و باسار و اولسدار (۱۹۹۹) مراجعه شود.

2. Ley
3. Arle Etc
4. Sargent and Wallac

پول تأمین مالی می‌شود. با تقسیم دو طرف معادلات بالا بر P_tY_t و همچنین با فرض پیوسته بودن زمان، معادله حرکت قید بودجه پویای دولت را می‌توان به‌صورت معادله (۲) نشان داد که در این معادله r نرخ بهره واقعی و g نرخ رشد اقتصادی است.

$$\dot{d}(t) = (r-g)d(t) + f(t) - m(t) \quad d(0) = d_0 \tag{۲}$$

در این معادله حرکت، بدهی دولت (d) به‌عنوان متغیر وضعیت و کسری بودجه (f) و پایه پولی (m) به‌عنوان متغیرهای کنترل در مدل شناخته می‌شوند. تابلینی (۱۹۸۶) در بررسی مدل خود، تفاوت بین نرخ بهره واقعی و رشد اقتصادی را تنها برابر نرخ بهره واقعی درنظر گرفته است، اما در این مطالعه از تفاضل دو متغیر نرخ بهره واقعی و نرخ رشد اقتصادی استفاده می‌کنیم. در بخش شبیه‌سازی، می‌توان اثرات تغییر در نرخ بهره واقعی و نرخ رشد اقتصادی را به‌طور مجزا بر مسیر بدهی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. همچنین شرط بازی بدون پونزی[۱] نیز در این مدل برقرار است.

از طرف دیگر، می‌توانیم تابع زیان (تابع هدف) دو سیاست‌گذار پولی و مالی را مشخص کنیم. فرض می‌کنیم که کسری بودجه توسط دولت و پایه‌پولی توسط بانک مرکزی کنترل می‌شود. از این‌رو تابع زیان مقام مالی و پولی به‌صورت معادلات (۳) و (۴) نوشته می‌شوند:

$$L_F = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \{(f(t)-\bar{f})^2 + \varphi(m(t)-\bar{m})^2 + \theta\big(d(t)-\bar{d}\big)^2\big\} \mathrm{e}^{-\rho t}\, dt \tag{۳}$$

$$L_M = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \{(m(t)-\bar{m})^2 + \eta(f(t)-\bar{f})^2 + \tau\big(d(t)-\bar{d}\big)^2\big\} \mathrm{e}^{-\rho t}\, dt \tag{۴}$$

هر دوی بازیکنان (دولت و بانک مرکزی) به‌دنبال حداقل کردن تابع زیان خود نسبت به قید پویای بدهی می‌باشند. در این معادلات، ρ به‌عنوان فاکتور تنزیل در مدل است. همچنین θ و τ بیانگر وزن نسبت داده شده به بدهی به ترتیب توسط دولت و بانک مرکزی

---

۱. یعنی سطح بدهی نمی‌تواند برای همیشه درحال رشد باشد.

است. هرچه مقدار θ پایین و τ بالا باشد، نشان دهنده آن است که مقام پولی نسبت به مقام مالی اهمیت بیشتری به ثبات بدهی می‌دهد. این به معنای آن است که پول بیشتری توسط بانک مرکزی برای تثبیت بدهی منتشر می‌شود. از این‌رو با یک سیاست‌گذار پولی ضعیف و سیاست‌گذار مالی قوی مواجه هستیم. همچنین برخلاف مدل تابلینی فرض می‌کنیم که رشد پایه پولی و رشد کسری بودجه به ترتیب در تابع زیان سیاست‌گذار مالی و پولی وارد می‌شود. یعنی از یک طرف رشد پول برای دولت از اهمیت بالایی برخوردار است و از طرف دیگر رشد کسری بودجه برای مقام پولی حائز اهمیت می‌باشد. از این‌رو φ و η وزن نسبی نسبت داده شده به رشد پایه پولی و کسری بودجه به ترتیب توسط دولت و بانک مرکزی است. همچنین در این معادلات $\bar{d}$، $\bar{f}$ و $\overline{m}$ متغیرهای برون‌زا در مدل هستند که به‌-عنوان سطح هدف برای متغیرهای بدهی، کسری بودجه و پایه پولی می‌باشند. این اهداف، توسط سیاست‌گذار تعیین می‌شود.

یکی از مباحث مهمی که در طی سالیان اخیر در ارتباط با تقابل استراتژیک بین مقامات پولی و مالی مورد بررسی قرار گرفته است، وارد کردن نقش نااطمینانی در مدل و چگونگی مقابله با این نااطمینانی توسط سیاست‌گذران است (براینارد[1] (۱۹۶۷)، لان[2] (۲۰۰۳)، بارتلومی و همکاران[3] (۲۰۰۹)). زمانی که تصمیم‌گیری‌های سیاستی توسط مقامات کشور اتخاذ می‌شود، هیچ اطلاعات کاملی در ارتباط با داده‌های اقتصادی گذشته، حال و آینده وجود ندارد. از این‌رو وارد کردن نااطمینانی در تقابل استراتژیک بین سیاست‌های پولی و مالی، اجتناب ناپذیر و حیاتی است. نااطمینانی سیاست‌گذران در ارتباط با متغیرهای کلان اقتصادی همانند تورم، نرخ ارز، نرخ بهره، مخارج و غیره و از طرف دیگر چگونگی برخورد سیاست‌گذران با این نااطمینانی‌ها، نقش مهمی در سیاست-های تثبیت ایفا می‌کنند. در برخی از کشورهای درحال توسعه همانند ایران که بیش از ۵۰ درصد از درآمدهای دولت وابسته به درآمدهای نفتی است، نوسانات درآمدهای نفتی و

---

1. Brainard
2. Lane
3. Bartolomeo et al

درآمدهای ارزی و نااطمینانی در ارتباط با این نوع از درآمدها درآینده، یک مسئله مهم برای تصمیم‌گیری سیاست‌گذاران است. وجود شوک‌های بزرگ نفتی و نوسانات بزرگ، می‌تواند سیاست برنامه‌ریزی شده دولت را تغییر دهد و ممکن است مسیر طرح‌های برنامه-ریزی شده برای آینده و انتشار پول ایجاد شده توسط بانک مرکزی را تحت تاثیر قرار دهد. بسیاری از این مطالعات اولیه، در چارچوب بازی‌های ایستا با نااطمینانی تصادفی، به بررسی نقش نااطمینانی در تقابل بین سیاست‌گذران پرداخته‌اند. براینارد (۱۹۶۷) نشان داد که وجود نااطمینانی در مدل استراتژیک بین مقامات، می‌تواند سبب محتاط‌تر شدن عکس‌العمل سیاست‌گذران در اجرای سیاست‌گذاری شود و وجود این نااطمینانی می‌تواند سبب تغییر پاسخ سیاست‌گذار، به رفتارهای سیاستی شود. مارکادو و کندریک[1] (۲۰۰۰) در چارچوب مدل خطی کنترلی درجه دوم نشان دادند که اگر نااطمینانی نسبت به آینده افزایش یابد، آنگاه متغیرهای کنترلی به شدت به این نااطمینانی‌ها پاسخ می‌دهند.

این‌رو در این مطالعه قصد داریم تا مدل پایه‌ای ارائه شده در قسمت قبل را با وارد کردن نااطمینانی، توسعه دهیم. برای بیان وجود نااطمینانی در مدل تابلینی (۱۹۸۶)، جمله اخلال جمع‌پذیری[2] را به قید بودجه دولت اضافه می‌کنیم و از این‌رو معادله (۲) به‌صورت معادله زیر بازنویسی می‌شود[3]:

$$\dot{d}(t) = (r-g)d(t) + f(t) - m(t) + w(t) \qquad (۵)$$

در این معادله $w(t)$ ارائه کننده اختلالات نامشخص در مدل می‌باشد که بر روی قید بودجه اثر گذار است. این اختلالات نامشخص، می‌تواند نااطمینانی درارتباط با درآمد نفت، نرخ ارز، نرخ تورم و غیره در آینده باشد. همچنین تابع زیان مقامات پولی و مالی تحت نااطمینانی به‌صورت معادلات زیر بازنویسی می‌شوند:

---

[1]. Mercado and Kendrick

[2]. An Additive Disturbance Term

۳. برای آشنایی بیشتر در ارتباط با وارد شدن نااطمینانی در سیستم‌های کنترل بهینه، به انجودا (۲۰۰۵) فصل نهم مراجعه شود.

$$L_F = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \{(f(t)-\bar{f})^2 + \varphi(m(t)-\bar{m})^2 + \theta\big(d(t)-\bar{d}\big)^2 - v_f w^2(t)\big\} e^{-\rho t}\, dt \qquad (۶)$$

$$L_M = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \{(m(t)-\bar{m})^2 + \eta(f(t)-\bar{f})^2 + \tau\big(d(t)-\bar{d}\big)^2 - v_m w^2(t)\big\} e^{-\rho t}\, dt \qquad (۷)$$

این معادلات نشان می‌دهد که نویزها در مدل $(w(t))$ در طول زمان رخ می‌دهند. همچنین این دو تابع زیان نشان می‌دهند که هر دو بازیکن (دولت و بانک مرکزی) رفتارهای‌شان را بر این اساس شکل می‌دهند که از نقطه نظر آنان، سناریوی بدترین حالت در ارتباط با اختلالات[1] در آینده اتفاق خواهد افتاد. از این رو نویزها در تابع زیان به‌طور درجه دوم و با علامت منفی ظاهر می‌شوند. پارامترهای v_f و v_m پارامترهای حساسیت ریسک[2] هستند. اگر شرایط $v_i \to \infty$ برقرار باشد، نشان دهنده این است که هیچ نویزی در مدل وجود ندارد و هر چقدر v_i به سمت صفر حرکت کند، نشان دهنده شناسایی نویزهای بیشتر و نااطمینانی بیشتر توسط سیاست‌گذران در مدل است.

٤. حل مدل پایه‌ای بر اساس بازی همکارانه و غیرهمکارانه بدون در نظر گرفتن نااطمینانی

در این قسمت، با توجه به مدل پایه‌ای ارائه شده در بخش سوم، به بررسی تعیین مسیرهای تعادلی متغیرهای‌بدهی، کسری بودجه و پایه‌پولی در چارچوب بازی همکارانه و بازی غیرهمکارانه، بدون درنظر گرفتن نقش نااطمینانی در مدل می‌پردازیم. با حل این بازی‌ها، به‌دنبال یافتن مسیرهای بهینه برای متغیرهای اقتصاد کلان و سیاست‌های تثبیت هستیم.

٤-١. بازی همکارانه و تعادل نش

در این قسمت فرض می‌شود دولت و بانک مرکزی به‌عنوان دو بازیکن در بازی، یک بازی همکارانه‌ای را با یکدیگر به اجرا در می‌آورند. در این بازی دو سیاست‌گذار با

---

1. Worst Case Scenario of The Disturbance
2. Risk-Sensitivity Parameters

ترکیب توابع زیان خود با وزن‌های متفاوت، این تابع زیان را نسبت به قید بودجه‌ی پویای دولت حداقل می‌کنند. در این بازی فرض می‌شود که بازیکنان می‌توانند با یکدیگر مذاکره[1] کنند و تعهدات الزام‌آوری[2] انجام دهند و به‌منظور اهداف مشترک باهم همکاری کنند. در این بازی، هر بازیکن تمام اطلاعات موجود درارتباط با رقیب خود را می‌داند و همه بازیکنان قادر هستند تا تصمیمات‌شان را اجرا کنند. همچنین تعادل همکارانه به‌عنوان کارایی پارتو[3] نیز مطرح است که از آن به‌عنوان مبنا[4]، برای مقایسه با بازی‌های دیگر استفاده می‌شود.

با فرض این‌که ω وزن نسبی نسب داده شده به تابع هدف سیاست‌گذار مالی و $(1-\omega)$ وزن نسبی نسبت داده شده به تابع هدف بانک مرکزی و همچنین $\omega \in (0,1)$ باشد، دراین وضعیت، مجموعه جواب بهینه پارتو معادلات (۲) تا (۴) با حل بهینه‌یابی مسئله زیر به‌دست می‌آید:

$$\min_{f,m} \omega L_F + (1-\omega)L_M \quad s.t \;\; \dot{d}(t) = (r-g)d(t) + f(t) - m(t) \;\; d(0) = d_0 \tag{۸}$$

از این‌رو مسیرهای تعادلی برای معادلات بدهی، کسری بودجه و انتشار پول در بازی همکارانه بدون وجود نااطمینانی، با استفاده از قضیه ۱ نشان داده می‌شود:

قضیه ۱. بازی دیفرانسیلی معادله (۸) را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت با استفاده از برخی تکنیک‌های ریاضی (به ضمیمه مراجعه شود)، مسیر تعادلی متغیرهای بدهی، کسری بودجه و پایه پولی در چارچوب بازی همکارانه، توسط معادلات زیر مشخص می‌شوند:

$$d^e(t) = \left(d_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} \tag{۹}$$

$$f^e(t) = \bar{f} - \frac{K}{\omega + (1-\omega)\eta} d^e(t) + \delta_2 \tag{۱۰}$$

$$m^e(t) = \bar{m} + \frac{K}{\omega\varphi + (1-\omega)} d^e(t) - \delta_3 \tag{۱۱}$$

---

1. Communicate
2. Binding Agreements
3. Pareto Efficient
4. Benchmark

که در این معادلات

$$\alpha = r - g - \frac{K}{\omega + (1-\omega)\eta} - \frac{K}{\omega\varphi + (1-\omega)}$$

$$\beta = \left(\frac{K}{\left(A - SK - \frac{1}{2}\rho\right)(\omega + (1-\omega)\eta)} + \frac{K}{\left(A - SK - \frac{1}{2}\rho\right)(\omega\varphi + (1-\omega))} + 1\right)\left((r-g)\bar{d} + \bar{f} - \bar{m}\right) - \alpha\bar{d}$$

$$\delta_2 = \frac{K}{\omega + (1-\omega)\eta}\left(\bar{d} + \frac{(r-g)\bar{d} + \bar{f} - \bar{m}}{A - SK - \frac{1}{2}\rho}\right)$$

$$\delta_3 = \frac{K}{\omega\varphi + (1-\omega)}\left(\bar{d} + \frac{(r-g)\bar{d} + \bar{f} - \bar{m}}{A - SK - \frac{1}{2}\rho}\right)$$

می‌باشد. همچنین K هم از حل معادله ریکاتی (۲۴) به‌دست می‌آید ■

در این معادلات $-\frac{\beta}{\alpha}$ نشان دهنده وضعیت پایدار بدهی دولت می‌باشد. همچنین α در سه معادله بالا نشان دهنده سرعت همگرایی به سمت وضعیت پایدار است. همچنین کسری بودجه در وضعیت پایدار برابر $\bar{f} - \frac{K}{\omega+(1-\omega)\eta}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \delta_2$ و پایه پولی در وضعیت پایدار برابر $\bar{m} + \frac{K}{\omega\varphi+(1-\omega)}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) - \delta_3$ می‌باشد.

٤-٢. بازی غیرهمکارانه با اطلاعات بازخورد[1]

در این قسمت فرض می‌شود دولت و بانک مرکزی به‌طور غیرهمکارانه بایکدیگر رفتارمی‌کنند و بازیکنان دارای ساختار اطلاعات بازخورد می‌باشند. استراتژی بازخورد که در برخی از مطالعات همانند فن لانگ[2] (۲۰۱۰)، به استراتژی کامل مارکوف[3] شهرت دارد، استراتژی‌هایی هستند که در آن بازیکنان رفتارهای‌شان را بر روی وضعیت جاری

---

1. Non Cooperative Games With Feedback Information

2. Van Long

3. Markov-Perfect Strategies

سیستم شکل می‌دهند. همان‌طور که انجوردا (۲۰۰۵) و باسار و اولسدار (۱۹۹۹) بیان کردند، اجرای استراتژی بازخورد نیازمند نظارت کامل بر روی سیستم است و برای اجرای این استراتژی، هر بازیکن مجبور است تا در هر نقطه از زمان، از وضعیت دقیق سیستم مطلع باشد. از طرف دیگر یکی از مزیت‌های استراتژی بازخورد این است که هیچ پیش تعهدی در این نوع از استراتژی وجود ندارد و اگر به علت برخی از دلایل خارجی، وضعیت سیستم در طول بازی تغییر کند، آن‌گاه بازیکنان قادر هستند تا به این اختلال[1] در مسیر بهینه پاسخ دهند. مسیرهای تعادلی برای معادلات بدهی، کسری بودجه و انتشار پول در بازی غیرهمکارانه با استراتژی بازخورد با استفاده از قضیه ۲ نشان داده می‌شود:

قضیه۲. بازی دیفرانسیلی معادلات (۲) تا (۴) را در نظر می‌گیریم. با انجام برخی تکنیک‌های ریاضی (به ضمیمه مراجعه شود)، در این حالت، مسیرهای تعادلی متغیرهای بدهی، کسری بودجه و پایه پولی در طول زمان در چارچوب بازی غیرهمکارانه با ساختار اطلاعاتی بازخورد، توسط معادلات زیر مشخص می‌شوند:

$$d^e(t) = \left(d_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} \qquad (۱۲)$$

$$f^e(t) = \bar{f} - k_{11}\left(d^e(t) - \bar{d}\right) - k_{12} \qquad (۱۳)$$

$$m^e(t) = \bar{m} + k_{21}\left(d^e(t) - \bar{d}\right) + k_{22} \qquad (۱۴)$$

که در این معادلات

$$\alpha = r - g - k_{11} - k_{21}$$
$$\beta = \bar{f} - \bar{m} + (k_{11} + k_{21})\bar{d} - k_{12} - k_{22}$$

می باشد. همچنین k_{ij} *برای* $ij = 1,2$ نیز از حل معادله ریکاتی جبری قضیه ۶ (به ضمیمه مراجعه شود) استخراج می‌شود ■

در این معادلات $-\frac{\beta}{\alpha}$ نشان دهنده وضعیت پایدار بدهی دولت، $\bar{f} - k_{11}(-\frac{\beta}{\alpha} - \bar{d}) - k_{12}$ نشان دهنده وضعیت پایدار کسری بودجه دولت و $\bar{m} + k_{21}(-\frac{\beta}{\alpha} - \bar{d}) +$

1. Disturbance

k_{22} نشان دهنده وضعیت پایدار پایه‌پولی در این مدل می‌باشد. همچنین α در سه معادله بالا نشان دهنده سرعت همگرایی به سمت وضعیت پایدار است.

۵. حل مدل پایه‌ای براساس بازی همکارانه و غیرهمکارانه با درنظر گرفتن نااطمینانی

هدف ما در این بخش آن است تا مسیرهای تعادلی متغیرهای کلان اقتصادی در مدل تابلینی(۱۹۸۶)، بر اساس معادلات (۵) تا (۷) را تجزیه و تحلیل کنیم. در این مدل‌ها، نااطمینانی وارد مدل می‌شود و از این‌رو قصد داریم تا در چارچوب بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه، به بررسی رفتار بازیکنان به این اختلالات و چگونگی مقابله با آن بپردازیم.

۵-۱ . بازی همکارانه با اطلاعات بازخورد با وجود نااطمینانی

در این قسمت فرض می‌کنیم که دولت و بانک مرکزی، بازی همکارانه‌ای را با یکدیگر انجام می‌دهند. همانند قبل فرض می‌کنیم که ω وزن نسبی نسب داده شده به تابع هدف سیاست‌گذار مالی و $(1-\omega)$ هم وزن نسبی نسبت داده شده به تابع هدف بانک مرکزی می‌باشد. دراین وضعیت، مجموعه جواب بهینه پارتو معادلات (۵) تا (۷) با حل بهینه‌یابی مسئله زیر حل می‌شود:

$$\min_{f,m} \max_{w} \omega L_F + (1-\omega)L_M - vw^2(t) \quad s.t \quad \dot{d}(t) = (r-g)d(t) + f(t) - m(t) + w(t) \tag{۱۵}$$

از این رو مسیرهای تعادلی برای معادلات بدهی، کسری بودجه و انتشار پول با استفاده از قضیه ۳ نشان داده می‌شود:

قضیه۳. بازی دیفرانسیلی معادله (۱۵) را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت با انجام برخی تکنیک‌های ریاضی (به ضمیمه مراجعه شود)، سیاست‌های مالی و پولی بهینه در چارچوب بازی همکارانه تحت نااطمینانی، توسط معادلات زیر مشخص می‌شوند:

$$f^e(t) = \bar{f} - \frac{1}{\omega + (1-\omega)\eta}\left(k_{11}(d^e(t) - \bar{d}) + k_{12}\right) \tag{۱۶}$$

$$m^e(t) = \bar{m} + \frac{1}{\varphi\omega + (1-\omega)}\left(k_{11}(d^e(t) - \bar{d}) + k_{12}\right) \tag{۱۷}$$

که در این معادلات، $d^e(t)$ از طریق حل معادله دیفرانسیلی زیر به‌دست می‌آید که این معادله دیفرانسیلی به اختلال $w(t)$ وابسته است.

$$\dot{d}^e(t) = \alpha d^e(t) + \beta + w(t); d(0) = d_0 \qquad (۱۸)$$

در این معادله $\bar{\omega} := \frac{1}{\omega+(1-\omega)\eta} + \frac{1}{\varphi\omega+(1-\omega)}$، $\alpha = r - g - \bar{\omega}k_{11}$ و $\beta = \bar{f} - \bar{m} + \bar{\omega}k_{11}\bar{d} - \bar{\omega}k_{12}$ می‌باشد. همچنین $k_{ij}, ij = 1,2$, از حل معادله جبری ریکاتی (۳۶) به‌دست می‌آید ■

۵-۲. بازی‌های غیرهمکارانه با اطلاعات بازخورد با وجود نااطمینانی

در این قسمت فرض می‌کنیم که دوبازیکن یعنی دولت و بانک مرکزی به‌طور غیرهمکارانه رفتار می‌کنند و هر بازیکن به‌طور مستقل در تلاش برای حداقل کردن تابع زیان خود نسبت به قید بودجه است. مدل‌های پایه‌ای در این قسمت مدل‌های (۵) تا (۷) می‌باشند که در این مدل پویای خطی درجه دوم، نااطمینانی هم در مدل وارد شده و دولت و بانک مرکزی با در نظر گرفتن وجود این اختلالات و نااطمینانی، سعی دارند تا بهترین مسیر بهینه برای متغیرها را انتخاب کنند.

قضیه ٤. بازی دیفرانسلی (۵) تا (۷) را درنظر می‌گیریم. با فرض این‌که برخی شرایط تکنیکی از جنبه ریاضی تامین شود (ضمیمه مراجعه شود)، آن‌گاه مجموعه سیاست‌های تعادل نش نرم مقید[1] برای دولت و بانک مرکزی به‌صورت معادلات زیر مشخص می‌شوند:

$$f^e(t) = \bar{f} - k_{11}\left(d^e(t) - \bar{d}\right) - k_{12} \qquad (۱۹)$$

$$m^e(t) = \bar{m} + k_{21}\left(d^e(t) - \bar{d}\right) + k_{22} \qquad (۲۰)$$

که در این معادلات، $d^e(t)$ از طریق حل معادله دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید. این معادله دیفرانسیل وابسته به اختلالات $(w(t))$ می‌باشد:

$$\dot{d}^e(t) = \alpha d^e(t) + \beta + w(t); d(0) = d_0 \qquad (۲۱)$$

[1]. Soft-Constrained Nash Equilibrium

در ایـــن معادلـــه $\alpha = r - g - k_{11} - k_{21}$ و $\beta = \bar{f} - \bar{m} + (k_{11} + k_{21})\bar{d} - k_{12} - k_{22}$ می‌باشد. همچنین $k_{ij},\ i,j = 1,2$ از حل معادلات ریکاتی (۴۵) و (۴۶) به‌دست می‌آیند ■

٦. پارامترهای مورد استفاده در مدل و شبیه‌سازی

در ابتدا و قبل از شبیه‌سازی مسیرهای تعادلی، نیازمند مقادیری بـرای پارامترهـا در مـدل می‌باشیم که سازگار با اقتصاد ایران باشد. مقادیر اولیه که برای پارامترها انتخاب شده است، در جدول ۱ نشان داده می‌شود. پارامترهای نرخ رشد اقتصاد و نرخ بهره واقعی برابر میانگین این دو نرخ از سال ۱۳۵۲ تا ۱۳۹۱ در اقتصاد ایران می‌باشد. نرخ رجحان زمانی هم برگرفته از مطالعه عبدلی (۱۳۸۸) برای اقتصاد ایران است. مقادیر بدهی اولیه و بـدهی هـدف هـم بـا توجه به روند بدهی در اقتصاد ایران ۰/۴ و ۰/۱ در نظر گرفته شـده اسـت. در ایـن قسـمت فرض شده است که دولت در ایران سطح هدف برای کسری بودجه بـا درآمـدهای نفتـی را برابر ۰/۰۲ قرار می‌دهد و همچنین بانک مرکزی در تلاش است تا سطح هدف پایه پولی را به پایین‌ترین میزان آن کاهش دهد تا بتواند سطح تورم را هم کنترل کند. از طرفی هم برای ساده سازی در مدل فرض می‌کنیم دولت و بانک مرکزی وزن‌های یکسـانی را بـه بـدهی و همچنین کسری بودجه و پایه پولی می‌دهند که مقادیر آنها در جدول ۱ نشان داده می‌شوند.

جدول ۱. پارامترهای مورد استفاده برای شبیه‌سازی در بازی‌های دیفرانسیلی

پارامترها	g	r	ρ	$d(0)$	$\bar{d}$	$\bar{m}$	$\bar{f}$	θ	τ	φ	η	ω
مقادیر	0/02	-0/02	0/07	0/4	0/1	0/01	0/02	0/05	0/05	0/05	0/05	0/5

٦-۱. شبیه سازی برای بازی همکارانه و غیرهمکارانه بدون نااطمینانی

در ایـن قسـمت بـا اسـتفاده از پارامترهـای موجـود بـرای اقتصـاد ایـران، بـه شـبیه‌سـازی مسیرهای تعـادلی در بـازی همکارانـه و غیرهمکارانـه بـر طبـق قضـایای ۱ و ۲ مـی‌پـردازیم. همان‌طور که بیان شد، در بازی همکارانه فرض می‌شود که دولت و بانک مرکزی به‌منظـور دستیابی به مسیرهای تعادلی متغیرها، بایکدیگر همکاری می‌کنند و مـی‌تواننـد مـذاکرات و تعهدات الزام‌آوری را به‌منظور به‌دست آوردن اهداف مشترک انجام دهند. همچنـین تعـادل

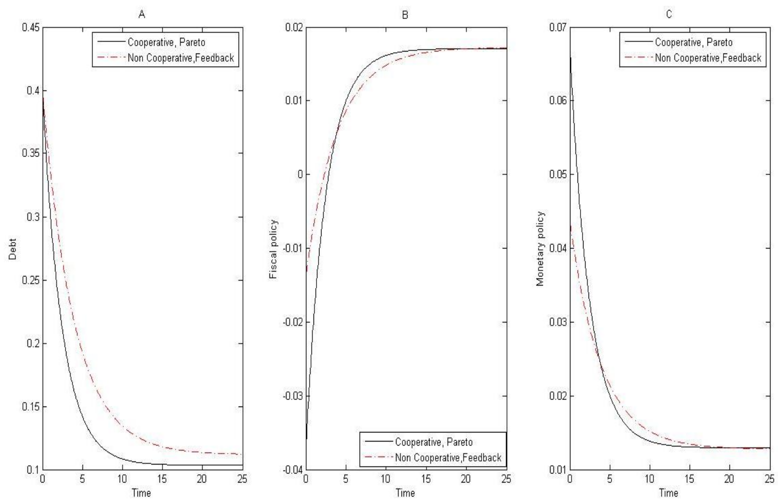
همکارانه به‌عنوان کارایی پارتو نیز مطرح است. تعادل در بازی همکارانه، زمانی که دولت و بانک مرکزی وزن‌های مشابهی را در تابع زیان خود لحاظ کنند و یا قدرت چانه‌زنی یکسانی داشته باشند ($\omega = \frac{1}{2}$)، به تعادل یا پیامد اجتماعی[1] نیز مشهور است. در شبیه‌سازی این قسمت، فرض می‌کنیم که دولت و بانک مرکزی وزن‌های مشابهی را در تابع زیان خود لحاظ می‌کنند و دارای قدرت چانه زنی یکسانی هستند. به‌عبارت دیگر $\omega = \frac{1}{2}$ می‌باشد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی بازی همکارانه بر اساس قضیه ۱ نشان می‌دهد که ارزش پایدار بدهی تعادلی برابر ۰/۱۰۳۴ و سرعت همگرایی به سمت تعادل نیز برابر ۰/۴۰۸۰ می‌باشد. همچنین در وضعیت پایدار، میزان کسری بودجه تعادلی و ارزش پایه پولی به ترتیب برابر با ۰/۰۱۷۱ و ۰/۰۱۲۹ می‌باشد.

در بازی دیگر فرض نموده‌ایم که دولت و بانک مرکزی به‌طور غیرهمکارانه با یکدیگر رفتار می‌کنند و هر بازیکن به‌طور مستقل در پی حداقل کردن تابع زیان خود نسبت به قید بودجه است. مسیرهای تعادلی در این بازی توسط قضیه ۲ به اثبات رسید. در این بازی فرض می‌شود که دو بازیکن در بازی دارای ساختار اطلاعاتی بازخورد هستند. یعنی هر دو بازیکن در هر لحظه از زمان، از وضعیت آن نقطه از زمان مطلع هستند و می‌توانند رفتارهای‌یشان را در طول مسیر بازی، تغییر دهند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در بازی غیرهمکارانه نشان می‌دهد که در وضعیت پایدار، ارزش بدهی تعادلی برابر ۰/۱۱۱۷ و سرعت همگرایی برابر با ۰/۲۵۴۴ است. همچنین کسری بودجه در وضعیت پایدار برابر ۰/۰۱۷۲ و پایه پولی برابر با ۰/۰۱۲۸ می‌باشد.

این ارقام نشان می‌دهند زمانی که دولت و بانک مرکزی به‌طور غیرهمکارانه رفتار می‌کنند، سطح بدهی تعادلی بالاتر از بازی همکارانه می‌باشد و همچنین سرعت همگرایی به سمت تعادل کمتر از بازی همکارانه است. این نتایج در نمودار ۴ نشان داده می‌شود. همان‌طور که از نمودار مشخص است، درطول مسیر زمانی، همواره سطح بدهی تعادلی در بازی غیرهمکارانه، بیش از بازی همکارانه است. در بازی همکارانه نسبت به بازی غیرهمکارانه،

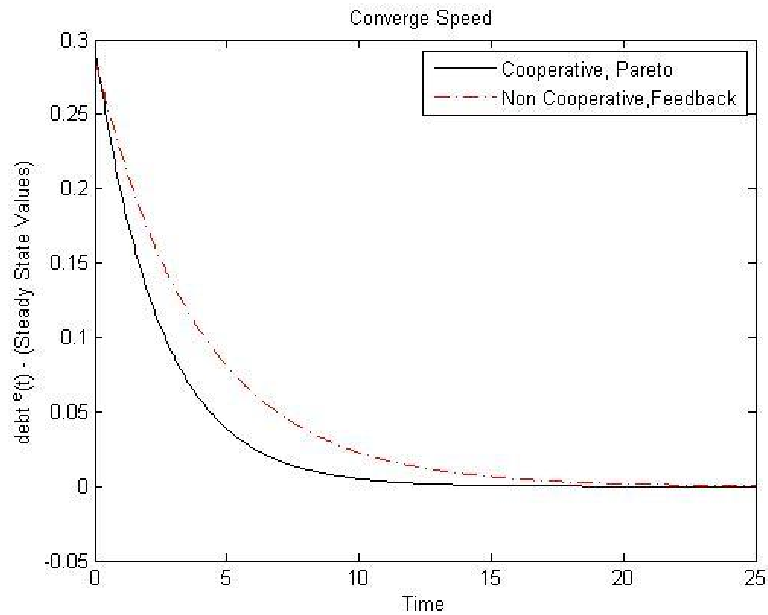
[1]. Social Ouetcome

در دوره زمانی کوتاه‌مدت، دولت و بانک مرکزی تلاش بیشتری را برای تثبیت و نزدیک کردن بدهی به سطح مطلوب انجام می‌دهند و در بلندمدت با کسری بودجه کمتر و انتشار پول کمتر، بدهی را به سمت مطلوب نزدیک‌تر می‌کنند.



نمودار ٤. مقایسه مسیرهای تعادلی در بازی همکارانه و بازی غیرهمکارانه

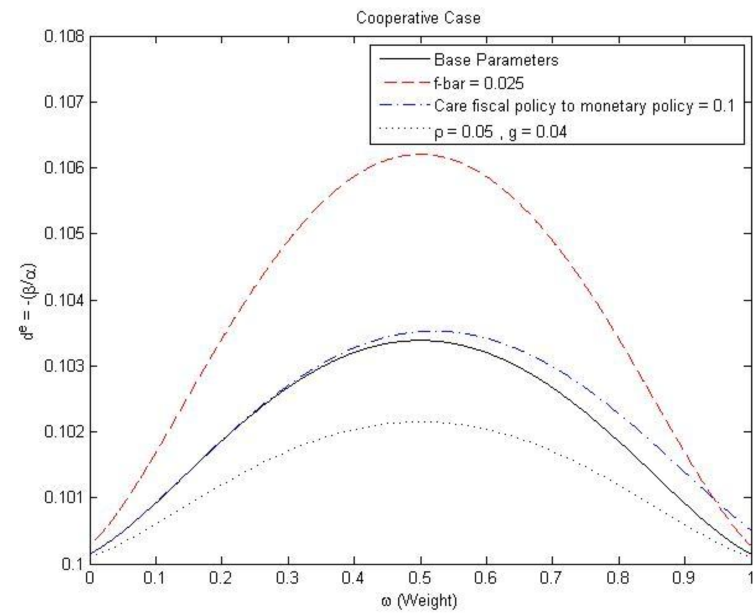
نمودار ۵ تفاوت بین بدهی تعادلی از وضعیت پایدار به‌عنوان تابعی از زمان، در دو بازی را نشان می‌دهد. هدف از رسم این نمودار آن است تا سرعت همگرایی به سمت تعادل در دو بازی را مقایسه کنیم. همان‌طور که انتظار می‌رود، سرعت همگرایی در بازی همکارانه در طول زمان، بیش از بازی غیرهمکارانه است و بدهی تعادلی در بازی همکارانه با سرعت بیشتری در طول زمان به سمت وضعیت پایدار حرکت می‌کند.



نمودار ۵. مقایسه سرعت همگرایی در بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه

در شبیه‌سازی دیگر، به‌دنبال بررسی این موضوع هستیم که تغییر در وزن‌های نسبت داده شده توسط دو مقام به تابع زیان (تغییر در ω) در بازی همکارانه، چه اثری بر روی بدهی در وضعیت پایدار دارد. نمودار ۶ این موضوع را نشان می‌دهد. نتایج براساس پارامترهای اولیه نشان می‌دهد که هرچقدر دولت وزن بیشتری را برای تابع زیان خود نسبت به بانک مرکزی قائل باشد، بدهی در وضعیت پایدار بیشتر در حال کاهش است که این روند در شکل برای ω های بیشتر از $\frac{1}{2}$ مشاهده می‌شود. از طرف دیگر فرض کنیم که سطح کسری بودجه اولیه به ۰/۰۲۵ افزایش یابد. همان‌طور که از شکل مشخص است سطح بدهی تعادلی در وضعیت پایدار برای ω های مختلف، تقریبا بیش از دو برابر سطح اولیه، افزایش می‌یابد. از طرف دیگر نتایج نشان می‌دهد که با کاهش نرخ ترجیح زمانی و افزایش رشد اقتصاد، در امتداد تغییر در وزن در تابع زیان توسط مقام مالی، سطح بدهی تعادلی کمتر از حالت اولیه است. به‌علاوه اگر φ یعنی همان وزنی که دولت به انحراف

پایه پولی از سطح هدف می‌دهد، از ۰/۰۵ به ۰/۱ افزایش یابد، آن‌گاه بدهی تعادلی تا زمانی که $\omega = \frac{1}{2}$ است، برابر با بدهی اولیه است، اما از زمانی که ω بیش‌تر از $\frac{1}{2}$ افزایش می‌یابد، بدهی تعادلی تا حدودی افزایش می‌یابد. این شاید دلیل بر این باشد که دولت برای نزدیک‌تر کردن بدهی به سطح مطلوب، نمی‌تواند هم‌زمان، هم به انتشار پول و بدهی توجه داشته باشد و هم تابع زیان را مورد توجه قرار دهد، بنابراین باید نقش فعال‌تری را برای بانک مرکزی درنظر بگیرد.



نمودار ٦. رابطه بین ω و بدهی تعادلی در وضعیت پایا در بازی همکارانه

٦-٢. شبیه‌سازی برای بازی همکارانه و غیرهمکارانه با در نظر گرفتن نااطمینانی

در این بخش به شبیه‌سازی مدل‌های استخراج شده براساس قضیه‌های ۳ و ۴ در بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه خواهیم پرداخت. می‌خواهیم این موضوع را مورد بررسی قرار دهیم که اگر دو سیاست‌گذار پولی و مالی، نسبت به متغیرهای کلان اقتصادی

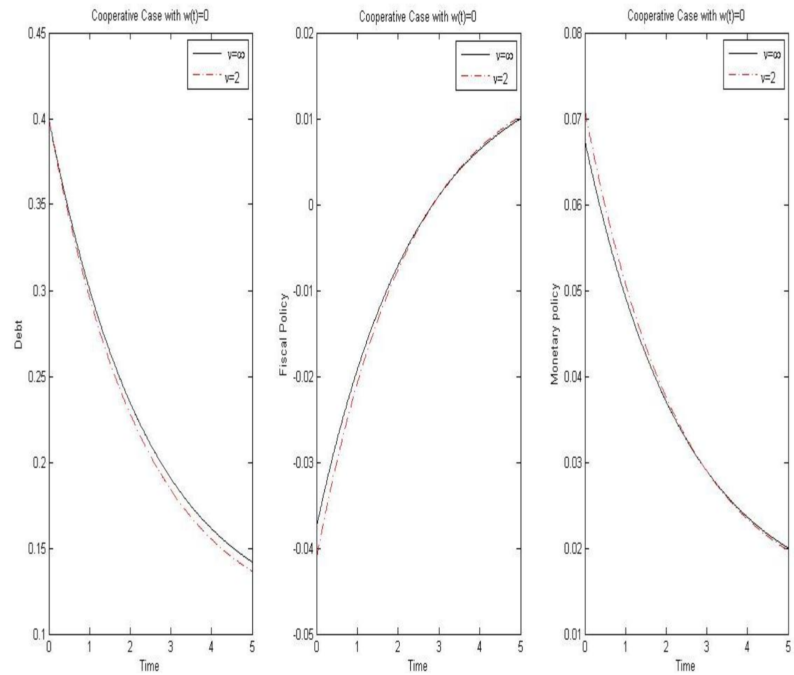
در آینده نااطمینانی داشته باشند، آن‌گاه چگونه با انتخاب پارامترهای ریسک گریز، به این نااطمینانی واکنش نشان می‌دهند و از این طریق، سطح بدهی را به سطح مطلوبش نزدیک می‌کنند.

در ابتدا مدل‌های تعادلی مستخرج از قضیه ۳ برای بازی همکارانه، زمانی که انتظارات نویزی در مدل وارد می‌شود را شبیه سازی می‌کنیم. در این قسمت فرض می‌کنیم که دولت و بانک مرکزی وزن یکسانی را در توابع زیان خود لحاظ می‌کنند. در معادلات (۱۶) تا (۱۸)، پارامترهای α و β برای هر دو بازیکن یعنی $i = f, m$ به v_i وابسته است. زمانی که v_i به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، ارزش پارامترهای α و β به سمت ارزش این پارامترها، در بازی بدون نویز [1] همگرا می‌شود.

زمانی‌که سیاست‌گذران انتظارات نویزی را در تصمیم‌گیری‌شان منظور نمی‌کنند $(v_i = \infty)$، ارزش متناظر برای $\alpha^{No\ noise}$ و $\beta^{No\ noise}$ به ترتیب برابر $-0/4078$ و $0/0422$ می‌باشد. زمانی که سیاست‌گذاران این انتظار را داشته باشند که در آینده اختلالات سبب تاثیرگذاری بر مسیر بدهی می‌شود، آن‌گاه این بازیکنان با انتخاب پارامتر حساسیت ریسک، (به عنوان نمونه $v = 2$)، با این اختلالات مقابله می‌کنند. در این حالت ارزش متناظر برای $\alpha^{Noise} = -0/4298$ و $\beta^{Noise} = 0/0438$ خواهدبود. نمودار ۷ مسیرهای تعادلی بدهی و سیاست متناظر، برای زمانی که هیچ نویزی در مدل وارد نشود و همچنین برای زمانی که پارامتر حساسیت ریسک برابر $v = 2$ باشد را نشان می‌دهد. با فرض این‌که هیچ اختلالاتی به‌طور واقعی سیستم را مختل نکند ($w(t) = 0$)، در ابتدا مشاهده می‌کنیم که سطح بدهی در نمونه‌ی نویزی نسبت به نمونه‌ی بدون نویزی، با سرعت بیشتری به سمت مقادیر تعادل همگرا می‌شود. نمودار۷ نشان می‌دهد که اثر وارد کردن نویز به انتظارات بازیکنان سبب می‌شود بازیکنان تلاش فعال‌تری را برای رسیدن به سطح هدف بدهی، انجام دهند. این وضعیت باعث می‌شود درحالتی که سیاست‌گذارن

1. Noise-Free Case

انتظارت نویز در آینده را دارند نسبت به حالتی که هیچ نویزی را آنان انتظار ندارنـد، سـطح بدهی در کوتاه‌مدت سریع‌تر کاهش یابد.



نمودار ۷. مسیر بدهی در بازی همکارانه با نااطمینانی

جدول۲ سرعت همگرایی به سمت تعادل و همچنین بدهی تعادلی برای پارمترهای حساسیت ریسکی متفاوت را نشان می‌دهد. در تمام سناریوها فرض می‌کنیم که دو بازیکن یعنی دولت و بانک مرکزی، پارامترهای حساسیت-ریسک یکسانی را انتخاب می‌کنند. نتایج جدول این موضوع را تایید می‌کند زمانی‌که بازیکنان نگرانی بیشتری از نویز داشته باشند (انتظارت بیشتری نسبت به اختلالات در آینده را داشته باشند)، بدهی تعادلی در سطح کمتر و سرعت همگرایی به سمت تعادل در سطح بیشتری قرار خواهدگرفت.

جدول۲. سرعت همگرایی و بدهی تعادلی با پارمترهای حساسیت ریسکی متفاوت در بازی همکارانه

$-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$	β	α	v_i
0/1000	0/0457	-0/4566	1
0/1008	0/0449	-0/4452	1/25
0/1013	0/0444	-0/4381	1/5
0/1016	0/0440	-0/4333	1/75
0/1018	0/0438	-0/4298	2
0/1022	0/0434	-0/4251	2/5
0/1028	0/0428	-0/4161	5
0/1031	0/0425	-0/4119	10

منبع: محاسبات پژوهش

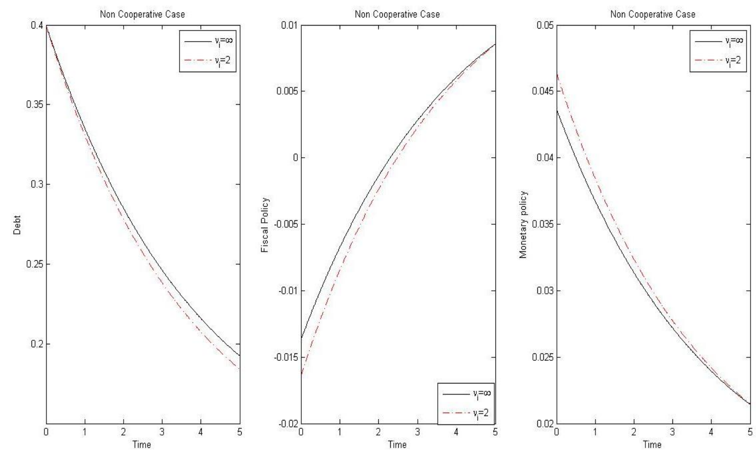
در این قسمت به شبیه‌سازی بازی غیرهمکارانه با توجه به قضیه ۴ می‌پردازیم. دوباره در اینجا فرض می‌کنیم که دولت و بانک مرکزی به‌عنوان دو بازیکن در بازی، به‌طور مستقل در پی حداقل کردن تابع زیان خود نسبت به قید بودجه مورد نظر هستند و به‌طور غیرهمکارانه رفتار می‌کنند. البته در این مدل فرض می‌شود که قید بودجه و توابع زیان، توسط اختلالات در مدل احاطه شده و سیاست‌گذاران انتظار نااطمینانی درآینده را دارند و با انتخاب پارامترهای ریسک گریز با این نااطمینانی‌ها مقابله می‌کنند.

برای بازی بدون نویز (زمانی که v_i به سمت بی‌نهایت میل می‌کند)، ارزش متناظر برای $\alpha^{no\ noise}$ و $\beta^{no\ noise}$ به ترتیب برابر با $-0/2544$ و $0/0284$ می‌باشد. حال فرض کنیم که دو بازیکنان یعنی دولت و بانک مرکزی انتظارت نویزی در مدل داشته باشند، آن‌گاه می‌توان به جواب‌های متفاوتی دست یابیم. برای نمونه وقتی پارامترهای حساسیت-ریسک [1] دو سیاست‌گذار پولی و مالی برابر $v_i = 2$ برای $i = f, m$ باشند (هرچقدر v_i به سمت صفر نزدیک شود، نشان دهنده افزایش انتظارت نویزی در مدل است و هر چقدر به بی‌نهایت میل کند، نشان می‌دهد هیچ نویزی در مدل وجود ندارد)، در این حالت ارزش متناظر برای $\alpha^{Noise} = -0/2710$ و $\beta^{Noise} = 0/0296$ می‌باشد.

اثر وارد کردن نااطمینانی در بازی غیرهمکارانه را می‌توان در نمودار ۸ مشاهده کرد. در بازی غیرهمکارانه نیز مشابه با بازی همکارانه، واردن کردن نااطمینانی در مدل سبب

---
1. Risk-Sensitivity Parameters

می‌شود که سیاست‌گذار پولی و مالی، تلاش فعال‌تری را برای رسیدن به سطح مطلوب بدهی، درسریع‌ترین حالت ممکن انجام دهند. این سیاست سبب می‌شود درحالتی که سیاست‌گذارن انتظارت نویز در آینده را دارند نسبت به حالتی که هیچ نویزی را آنان انتظار ندارند، سطح بدهی در کوتاه‌مدت سریع‌تر کاهش یابد.



نمودار ۸. مسیر بدهی در بازی غیرهمکارانه با نااطمینانی

در جدول ۳ می‌توانیم برای مقادیر مختلف از پارامترهای حساسیت ریسکی، ارزش بدهی و سرعت تعدیل در بازی غیرهمکارانه را مشاهده کنیم. مقایسه نتایج این جدول با جدول ۲، این موضوع را نشان می‌دهد که در بازی همکارانه نسبت به بازی غیرهمکارانه، سرعت همگرایی تقریباً دو برابر است. همچنین تفاوت اصلی بین مدل همکارانه و غیرهمکارانه این باشد که در بازی همکارانه، سیاست فعال‌تری توسط سیاست‌گذاران در کوتاه مدت برای حرکت بدهی به سطح هدفش مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جدول۳ .سرعت همگرایی و بدهی تعادلی با پارمترهای حساسیت ریسک متفاوت در بازی غیرهمکارانه

$-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$	β	α	v_i
0/1060	0/0310	-0/2924	1
0/1073	0/0304	-0/2831	1/25
0/1082	0/0300	-0/2775	1/5
0/1087	0/0298	-0/2737	1/75
0/1091	0/0296	-0/2710	2
0/1097	0/0293	-0/2673	2/5
0/1107	0/0289	-0/2606	5
0/1112	0/0286	-0/2575	10

منبع: محاسبات پژوهش

۷. جمع بندی و نتیجه‌گیری

در طی سالیان اخیر، مطالعات گسترده‌ای درارتباط با تقابل استراتژی بین دولت و بانک مرکزی به‌عنوان دو بازیکن که به‌ترتیب کنترل‌کننده سیاست مالی و سیاست پولی هستند صورت گرفته است. اقتصاددانان به‌دنبال پاسخ به این سوال بوده‌اند که چگونه بازی بین دولت و بانک مرکزی می‌تواند سبب پایداری سطح تعادلی بدهی شود. اقتصاد ایران هم در طی سالیان اخیر با وجود درآمدهای نفتی بالا شاهد نوسانات گسترده در این سه متغیر مهم بوده است و سیاست‌گذران اقتصادی همواره در تلاش بوده‌اند تا بتوانند با اعمال سیاستی مناسب به اهداف مدنظر خود دست یابند. از این‌رو در این مطالعه با استفاده از نظریه بازی-های پویای دیفرانسیلی، در چاچوب بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه این موضوع را در اقتصاد ایران مورد بررسی قرار داده‌ایم که چگونه سیاست‌گذاران پولی و مالی می‌توانند به یک سطح با ثبات از بدهی و کسری بودجه و انتشار پول دست یابند. نتایج مدل تعادلی نشان می‌دهد هنگامی که دولت و بانک مرکزی همکاری لازم برای دستیابی به یک سطح مشخص و مطلوبی از بدهی را داشته باشند، سطح پایین‌تری از بدهی در وضعیت پایدار نسبت به بازی غیرهمکارانه، به دست خواهد آمد. همچنین سرعت همگرایی به سمت تعادل در بازی همکارنه بیشتر از بازی غیرهمکارانه است. علاوه بر این نتایج نشان می‌دهد زمانی که دولت و بانک مرکزی نسبت به آینده نااطمینان باشند،آن‌گاه این دو سیاست‌گذار، تلاش فعال-

تری را برای رسیدن به سطح مطلوب بدهی، درسریع‌ترین حالت ممکن انجام می‌دهند. این سیاست سبب می‌شود درحالت وجود نااطمینانی نسبت به نویز، درمقایسه با حالتی که انتظار نویز وجود نداشته باشد، سطح بدهی سریع‌تر کاهش یابد.

براساس نتایج به‌دست آمده می‌توان توصیه سیاستی ارائه نمود. چنان‌چه دولت و بانک مرکزی برای رسیدن به سطح مطلوب از متغیرهای کلان اقتصادی، روش همکارانه‌ای را در پیش بگیرند می‌توانند به نتایج بهتری دست یابند. در روش همکارانه باید دولت و بانک مرکزی برای رسیدن به اهداف، با هم تعامل داشته باشند و همچنین هر دو سیاست‌گذار، متعهد به اجرای استراتژی خود باشند. در این وضعیت دولت و بانک مرکزی می‌توانند ازطریق مذاکره با یکدیگر، ابزارهای کنترلی خود را (بودجه و پایه پولی) به‌طور مشترک برای تثبیت در بدهی مورد استفاده قرار دهند. درحال‌حاضر بازی بین دولت و بانک مرکزی در ایران یک نوع از بازی غیرهمکارانه در قالب بازی استاکلبرگ (بازی رهبر – پیرو) ارزیابی می‌شود. نتایج این بازی از نظر دستیابی به اهداف کنترل بدهی و کسری بودجه و انتشار پول در مقایسه با بازی همکارانه در سطح پایین‌تری ارزیابی می‌شود. نوع بازی غیرهمکارانه که در این پژوهش بررسی شده است، به‌گونه‌ای است که، دولت و بانک مرکزی به‌طورمستقل، هرکدام توابع هدف خود را دنبال می‌کنند. در این بازی، همان‌طور که دولت از بانک مرکزی استقلال دارد، بانک مرکزی نیز در تصمیم‌گیری‌هایش مستقل از دولت عمل می‌نماید. اما در بازی همکارانه بدون این‌که طرفین مستقل از هم عمل کنند و یا یکی پیرو و دیگری رهبری نماید، هرکدام از طرفین، بخشی از تابع هدف خود را به بهینه نمودن هدف طرف مقابل اختصاص خواهند داد. لذا توصیه سیاستی به مقامات اقتصادی کشور، برقراری روابط تعاملی ازنوع بازی همکارانه بین دولت و بانک مرکزی است. برای عملیاتی کردن این نوع تعامل، لازم است نهاد ثالثی که مورد پذیرش هر دو طرف سیاست‌گذار پولی و مالی باشد، توابع هدف این دو را ازطریق مذاکره و ارائه توصیه، به یکدیگر نزدیک کند.

منابع و مآخذ

- Aarle, B, Van. Bovenberg, L. & Raith, M (*1995*) Monetary and fiscal policy interaction and government debt stabilization. *Journal of Economics*, *62, 111–140*.
- Aarle, B, Van. Bovenberg, L. & Raith, M (۱۹۹۷) Is there a tragedy of a common Central Bank? A dynamic analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, ۲۱*, 417-447.*
- *Abdoli, G. (2009), Estimation of Social Discount Rate in Iran, Economic Research, Vol9, No.3: 135-156*
- Alesina, A. & Tabellini, G (1987) Rules and Discretion with No coordinated Monetary and Fiscal Policies. *Economic Inquiry*, 25(4), 619-630.
- Barro, R. & Gordon, D (1983) A Positive Theory of Monetary Policy in a Natural-Rate Model. *Journal of Political Economy*, 91(3), 589–610.
- Barro, R. & Gorden, D (۱۹۸۳) Rules, Discretion, and Reputation in a Model of Monetary Policy. *Journal of Monetary Economics*, ۱۲, 101-20.
- Bartolomeo, G. Giuli, F. & Manzo, M (2009) Policy uncertainty, symbiosis, and the optimal fiscal and monetary conservativeness. *Empirica*, 14, 461-474
- Basar,T. & Olsder, G. (*1999*). Dynamic Non cooperative game theory. SIAM. Philadelphia
- Brainard, W (1967) Uncertainty and the effectiveness of policy. *American Economic Review*, 57, 411-425.
- Chen, Shyh-Wei (*2014*) Testing for fiscal sustainability: New evidence from the G_*7* and some European countries. *Economic Modelling*, *37, 1-15.*
- Collignon, S (2012) Fiscal policy rules and the sustainability of public debt in Europe. *International Economic Review*, Vol. 53, No. 2
- Dixit, A. & Lambertini, L (2000) Fiscal discretion destroys monetary commitment. *Working paper*, Princeton and UCLA.
- Doi, Takero. Takeo, Hoshi. & Tatsuyoshi Okimoto (*2011*) Japanese government debt and sustainability of fiscal policy. *Journal of the Japanese and International Economies.25, 414-433.*
- Engwerda, J.C. (۲۰۰۵). LQ Dynamic Optimization and Differential Games. John Wiley & Sons
- Engwerda, J. Van Aarle, B. Plasmans, J. & Weeren, A (2013) Debt stabilization games in the presence of risk premia. Journal of Economic Dynamics & Control, 37, 2525–254*6*
- Escolano, J (*2010*) A practical Guide to public Debt dynamics, fiscal sustainability, and cyclical adjustment of budgetary aggregates. *International Monetary Fund*.
- Kai, L (2004) A game between the fiscal and monetary authorities under inflation targeting. *European Journal of political economy*, 20, 709-724

- Kydland, F. & Prescott, E (1977) Rules Rather Than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans. *Journal of Political Economy*, 85, 473-490.
- Lane, P. R (2003) Monetary-fiscal interactions in an uncertain world: Lessons for European policymakers. Institute for International Integration Studies, *Dissertation, Trinity College Dublin*.
- Mercado R, P. & Kendrick D, A (2000) Caution in macroeconomic policy: uncertainty and the relative intensity of policy. *Economics Letter*s, 68, 37–41.
- Nash, J. F (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings National. Academy of Sciences,* 36, 48 – 49.
- Nash, J. F (1950) The bargaining problem. *Econometrica*, 18,155-162.
- Nash, J. F (1951) Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, 54,289-295.
- Nash, J. F (1953) Two-person cooperative games. *Econometrica*, 21,128-140.
- Rogoff, K (1985) The optimal Degree of Commitment to an Intermediate Monetary Target. *Quarterly Journal of Economics*, 100(4), 1169-89
- Sargent, T. & Wallace, N (*1981*) Some unpleasant monetarist arithmetic. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 5*, 1-17.*
- Snowdon, B. Vane, H. & Wynarczyk, P. (*1994*). A modern guide to macroeconomics: An introduction to competing schools of thought. Edward Elgar Publishing
- Tabellini, G (*1986*) Money, debt and deficits in a dynamic game. *Journal of Economic Dynamics and Control, 10, 427–442*
- Togo, E (*2007*) Coordinating Public Debt Management with Fiscal and Monetary Policies: An Analytical Framework*. Policy Research working paper, 4369*
- Van Long, N. (2010). A Survey of Dynamic Games in Economics. World Scientific Publishing
- Von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Walsh, C.E (1995) Optimal contracts for central bankers. *American Economic Review*, 85,150-167

ضمیمه

اثبات قضیه ۱.

با فرض اینکه $\tilde{f}(t) = f(t) - \bar{f}$ ، $\tilde{m}(t) = m(t) - \bar{m}$ ،$\tilde{d}(t) = e^{-\frac{1}{2}\rho t}(d(t) - \bar{d})$، $\tilde{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}(t)e^{-\frac{1}{2}\rho t}$ و $\tilde{\tilde{m}}(t) = \tilde{m}(t)e^{-\frac{1}{2}\rho t}$ باشد،

در این حالت مسئله بازی همکارانه می‌تواند به‌صورت حداقل کردن معادله زیر

$$y = \int_0^\infty \left(Q\tilde{d}^{\,2}(t) + \begin{bmatrix}\tilde{\tilde{f}}(t) & \tilde{\tilde{m}}(t)\end{bmatrix} R \begin{bmatrix}\tilde{\tilde{f}}(t) \\ \tilde{\tilde{m}}(t)\end{bmatrix}\right) dt \tag{۲۲}$$

نسبت به قید بودجه

$$\dot{\tilde{d}}(t) = A\tilde{d}(t) + B\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{f}}(t) \\ \tilde{\tilde{m}}(t)\end{bmatrix} + c \tag{۲۳}$$

بازنویسی شود، که در این معادلات

$$Q = (\theta\omega + \tau(1-\omega)) \ , R = \begin{bmatrix}\omega + (1-\omega)\eta & 0 \\ 0 & \omega\varphi + (1-\omega)\end{bmatrix}, A = \left(r - g - \frac{1}{2}\rho\right),$$

$$B = [1 \quad -1],\ \ c = \left((r-g)\bar{d} + \bar{f} - \bar{m}\right)e^{-\frac{1}{2}\rho t}$$

برای حل تابع زیان (۲۲) نسبت به قید (۲۳) از قضیه زیر که توسط اجنوردا (۲۰۰۵، ص ۲۰۷) به اثبات رسیده استفاده می‌کنیم.

قضیه ۵ : با فرض اینکه $c(.) \in L^e_{2,loc}$ باشد، از این‌رو مینمم کردن تابع زیان درجه دوم خطی

$$J(x_0, u) := \int_0^\infty \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}\, dt$$

که در آن $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ می باشد، نسبت به قید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + c(t), \qquad x(0) = x_0$$

دارای جواب برای همه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ می‌باشد، اگر و فقط اگر معادله جبری ریکاتی[1] زیر

---

[1]. Algebraic Riccati Equation

$$Q + A^T X + XA - XSX = 0 \quad (۲۴)$$

جواب با ثبات متقارن[1] $K(.)$ داشته باشد. اگر این مسئله کنترل خطی درجه دوم دارای همچین جوابی باشد از این‌رو کنترل بهینه توسط معادله زیر تعیین می‌شود:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T(Kx^*(t) + m(t))$$

و $m(t)$ هم توسط معادله

$$m(t) = \int_t^{\infty} e^{-(A-SK)^T(t-s)} Kc(s)ds,$$

به‌دست می‌آید. همچنین $x^*(t)$ با حل معادله دیفرانسیلی زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{x}^*(t) = (A - SK)x^*(t) - Sm(t) + c(t), x(0) = x_0$$

نکته: متغیر S هم از رابطه $S = BR^{-1}B^T$ به‌دست می‌آید و همچنین جواب تعادلی برای K با شرط پایدار بودن ماتریس $A - SK$ تعیین می‌شود.

با توجه به قضیه۵، جواب تعادلی متغیرهای کنترل در بازی همکارانه از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{f}}(t) \\ \tilde{\tilde{m}}(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega + (1-\omega)\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega\varphi + (1-\omega)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(K\tilde{d}(t) - \frac{K\left((r-g)\bar{d} + \bar{f} - \bar{m}\right)}{A - SK - \frac{1}{2}\rho} e^{-\frac{1}{2}\rho t} \right) \quad (۲۵)$$

و جواب تعادلی برای متغیر وضعیت بدهی دولت با حل معادله دیفرانسیلی زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{d}(t) = \alpha d(t) + \beta \quad , d(0) = d_0 \quad (۲۶)$$

که در این معادله می‌باشد.

$$\alpha = r - g - \frac{K}{\omega + (1-\omega)\eta} - \frac{K}{\omega\varphi + (1-\omega)}$$

---

[2]. Symmetric Stabilizing Solution

$$\beta = \left(\frac{K}{\left(A - SK - \frac{1}{2}\rho\right)(\omega + (1-\omega)\eta)} + \frac{K}{\left(A - SK - \frac{1}{2}\rho\right)(\omega\varphi + (1-\omega))} + 1 \right) \left((r-g)\bar{d} + \bar{f} - \bar{m} \right) - \alpha \bar{d}$$

اثبات قضیه ۲:

با فرض اینکه

$\tilde{d}(t) = (d(t) - \bar{d})e^{-\frac{1}{2}\rho t}$، $\tilde{m}(t) = (m(t) - \bar{m})e^{-\frac{1}{2}\rho t}$، $\tilde{f}(t) =$ $\left(f(t) - \bar{f}\right)e^{-\frac{1}{2}\rho t}$ و همچنین $x(t) = \begin{bmatrix} \tilde{d}(t) \\ e^{-\frac{1}{2}\rho t} \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه می‌توان مسئله حداقل کردن تابع زیان دو مقام مالی و پولی از معادلات (۲) تا (۴) را به‌صورت حداقل کردن معادلات

$$L_f = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^T(t) Q_1 x(t) + \tilde{f}^2(t) + \varphi \tilde{m}^2(t)\, dt \tag{۲۷}$$

$$L_m = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^T(t)\, Q_2 x(t) + \tilde{m}^2(t) + \eta \tilde{f}^2(t)\, dt \tag{۲۸}$$

نسبت به قید پویای

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 \tilde{f}(t) + B_2 \tilde{m}(t) \tag{۲۹}$$

باز نویسی کرد که در آن

$$A = \begin{bmatrix} r - g - \frac{1}{2}\rho & (r-g)\bar{d} + \bar{f} - \bar{m} \\ 0 & -\frac{1}{2}\rho \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = Q_f = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ Q_2 = Q_m = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$R_{11} = 1,\ R_{12} = \varphi\ ;\ R_{21} = \eta,\ R_{22} = 1$$

حال با استفاده قضیه زیر که توسط انجوردا (۲۰۰۵)به اثبات رسانده، تعادل نش برای متغیرهای کنترل و وضعیت در این نوع از بازی را می‌توان به‌دست آورد:

قضیه٦:

فرض میکنیم (K_1, K_2) راه حل پایدار متقارن[1] از معادلات جبر ریکاتی زیر باشد:

$$-(A - S_2K_2)^T K_1 - K_1(A - S_2K_2) + K_1S_1K_1 - Q_1 - K_2S_{21}K_2 = 0$$
$$-(A - S_1K_1)^T K_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_2 - K_1S_{12}K_1 = 0$$

باشد. در این‌صورت جواب تعادلی نش بازخورد برای متغیر کنترل u، با حل معادله $u = F_i^* x$، که در آن $F_i^* := -R_{ii}^{-1}B_i^T K_i$ برای $i = f, m$، می باشد حاصل می‌شود.

نکته: متغیر S_1، S_2، S_{12} و S_{21} هم با حل معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$S_1 = B_1R_{11}^{-1}B_1^T$$
$$S_2 = B_2R_{22}^{-1}B_2^T$$
$$S_{12} = B_1R_{11}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}B_1^T$$
$$S_{21} = B_2R_{22}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}B_1^T$$

و همچنین جواب تعادلی برای K با شرط پایدار بودن ماتریس $A - S_1K_1 - S_2K_2$ تعیین می‌شود.

از طرف دیگر بدهی تعادلی ازحل معادله دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{d}^e(t) = \alpha d^e(t) + \beta d(0) = d_0 \qquad (۳۰)$$

که در آن

$$\alpha = r - g - k_{11} - k_{21}$$
$$\beta = \bar{f} - \bar{m} + (k_{11} + k_{21})\bar{d} - k_{12} - k_{22}$$

اثبات قضیه۳:

با فرض اینکه : $\tilde{f}(t) := \left(f(t) - \bar{f}\right)e^{-\frac{1}{2}\rho t}, \tilde{m}(t) := (m(t) - \bar{m})\, e^{-\frac{1}{2}\rho t}, \tilde{d}(t) := (d(t) - \bar{d})\, e^{-\frac{1}{2}\rho t}\ ,\ \tilde{w}(t) := w(t)\, e^{-\frac{1}{2}\rho t}$ و همچنین

$$x(t) := \begin{bmatrix} \tilde{d}(t) \\ e^{-\frac{1}{2}\rho t} \end{bmatrix} \to \dot{x}(t) := \begin{bmatrix} \dot{\tilde{d}}(t) \\ -\frac{1}{2}\ e^{-\frac{1}{2}\rho t} \end{bmatrix}; \qquad (۳۱)$$

[1]. Symmetric Stabilizing Solution

آنگاه مسئله کنترل بهینه (۵) تا (۷) می تواند به‌صورت معادله زیر باز نویسی شود:

$$\min_{f,m} \max_{w} Y = \int_0^{\infty} \left\{ x^T(t)Qx(t) + [\tilde{f}(t) \quad \widetilde{m}(t)]R \begin{bmatrix} \tilde{f}(t) \\ \widetilde{m}(t) \end{bmatrix} - v\widetilde{w}^2(t) \right\} dt, \quad (۳۲)$$

نسبت به

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \begin{bmatrix} \tilde{f}(t) \\ \widetilde{m}(t) \end{bmatrix} + E\widetilde{w}(t) \quad (۳۳)$$

که در این معادلات

$$A = \begin{bmatrix} (r - g - \frac{1}{2}\rho) & \left((r-g)\bar{d} + \bar{f} - \overline{m}\right) \\ 0 & -\frac{1}{2}\rho \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} \theta\omega + (1-\omega)\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} \omega + (1-\omega)\eta & 0 \\ 0 & \varphi\omega + (1-\omega) \end{bmatrix}; v = v$$

$$S = BR^{-1}B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega + (1-\omega)\eta} + \frac{1}{\varphi\omega + (1-\omega)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \ M = EV_1^{-1}E^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{v}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

از طرف دیگر می‌توان K را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{13} \end{bmatrix}, \quad (۳۴)$$

از این‌رو مسئله کنترل بهینه برای دو مقام پولی و مالی در بازی همکارانه با وجود اختلالات، از معادله زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}(t) \\ \widetilde{m}(t) \end{bmatrix} = \quad (۳۵)$$

$$-\begin{bmatrix}\frac{1}{\omega+(1-\omega)\eta} & 0\\ 0 & \frac{1}{\varphi\omega+(1-\omega)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{d}(t)\\ e^{-\frac{1}{2}\rho t}\end{bmatrix}$$

که K از حل معادله ریکاتی زیر به‌دست می‌آید:

$$Q + A^T K + KA - KSK + KMK = 0 \qquad (۳۶)$$

به‌طوری‌که ماتریس‌های $A - SK + MK$ و $A - SK$ پایدارمی‌باشند:

بنابراین $x(t)$ می‌تواند از حل معادله دیفرانسیلی زیر به‌دست آید:

$$\dot{x}(t) = (A - SK)x(t) + E\widetilde{w}(t)\,; x(0) = \begin{bmatrix}d_0 - \bar{d}\\ 1\end{bmatrix} \qquad (۳۷)$$

اثبات قضیه ٤:

با فرض اینکه: $\tilde{f}(t) := \big(f(t) - \bar{f}\big)e^{-\frac{1}{2}\rho t}, \widetilde{m}(t) := (m(t) - \bar{m})\, e^{-\frac{1}{2}\rho t}, \tilde{d}(t) = (d(t) - \bar{d})\, e^{-\frac{1}{2}\rho t}\,,\ \widetilde{w}(t) := w(t)\, e^{-\frac{1}{2}\rho t}$ که $w(.)$ تابعی انتگرال پذیر مربع دلخواه[1] بر روی فاصله $[0, \infty)$ باشد، و همچنین

$$x := \begin{bmatrix}\tilde{d}(t)\\ e^{-\frac{1}{2}\rho t}\end{bmatrix} \to \dot{x} := \begin{bmatrix}\dot{\tilde{d}}(t)\\ -\frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}\rho t}\end{bmatrix}; \qquad (۳۸)$$

آنگاه با به‌کار گیری این علائم، معادلات (۵) تا (۷) می‌تواند به‌صورت زیر با نویسی شود:

$$\min_f \max_w L_F = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{x^T(t)Q_1x(t) + \tilde{f}^2(t) + \varphi\widetilde{m}^2(t) - v_f\widetilde{w}^2(t)\}dt \qquad (۳۹)$$

$$\min_m \max_w L_M = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{x^T(t)Q_2x(t) + \widetilde{m}^2(t) + \eta\tilde{f}^2(t) - v_m\widetilde{w}^2(t)\}dt \qquad (۴۰)$$

---

1. An Arbitrary Square Integrable Function

نسبت به قید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\tilde{f}(t) + B_2\widetilde{m}(t) + E\widetilde{w}(t) \tag{۴۱}$$

که در این معادلات،

$$A = \begin{bmatrix} (r - g - \frac{1}{2}\rho) & \left((r-g)\bar{d} + \bar{f} - \overline{m}\right) \\ 0 & -\frac{1}{2}\rho \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ;\ B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ Q_2 = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ R_{11} = 1;\ R_{12} = \varphi;\ R_{21} = \eta;\ R_{22} = 1;\ v_f = V_1; v_m = V_2$$

سپس ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$S_1 = B_1R_{11}^{-1}B_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ S_2 = B_2R_{22}^{-1}B_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$S_{12} = B_1R_{11}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}B_1^T = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ S_{21} = B_2R_{22}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}B_2^T = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$M_1 = EV_1^{-1}E^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{v_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\quad M_2 = EV_2^{-1}E^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{v_m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

از طرف دیگر ماتریس های K_1 و K_2 به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{13} \end{bmatrix}; K_2 = \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} \\ k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \tag{۴۲}$$

سپس سیاست‌های تعادل نش نرم مقید برای دولت و بانک مرکزی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{f}(t) = -R_{11}^{-1}B_1^TK_1x \tag{۴۳}$$

$$\widetilde{m}(t) = -R_{22}^{-1}B_2^TK_2x \tag{۴۴}$$

که K_1 و K_2 هم از حل معادلات ریکاتی جبری[1] زیر به‌دست می‌آیند:

$$-(A - S_2K_2)^T K_1 - K_1(A - S_2K_2) + K_1S_1K_1 - Q_1 - K_2S_{21}K_2 - K_1M_1K_1 = 0 \qquad (۴۵)$$

$$-(A - S_1K_1)^T K_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_2 - K_1S_{12}K_1 - K_2M_2K_2 = 0 \qquad (۴۶)$$

همچنین باید توجه شود شرط به‌دست آوردن K_1 و K_2 از طریق معادلات ریکـاتی (۴۵) و (۴۶) این است که مـاتریس‌هـا $A - S_1K_1 - S_2K_2 + M_1K_1$، $A - S_1K_1 - S_2K_2 + M_2K_2$ و $A - S_1K_1 - S_2K_2$ پایدار باشند.

به علاوه، $x(t)$ نیز از حل معادله دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{x}(t) = (A - S_1K_1 - S_2K_2)x(t) + E\widetilde{w}(t); \quad x(0) = \begin{bmatrix} d_0 - \bar{d} \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (۴۷)$$

▪ .

1. Algebraic Riccati Equations