

# مدیریت پرتفوی چنددوره‌ای همراه با کنترل ورشکستگی تحت رویکرد برنامه‌ریزی پویا

خدیجه حسنلو<sup>۱</sup>

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۲/۲۵ تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۱/۱۰

## چکیده

مدیریت کارای سبد اوراق بهادار از دیرباز تاکنون مورد توجه محققان حوزه مالی و مطلوب سرمایه‌گذاران بوده است. در این پژوهش به بررسی مسأله بهینه‌سازی سبد اوراق بهادار چنددوره‌ای برای مدیریت دارایی و بدهی برای سرمایه‌گذاری که قصد دارد قبل از رسیدن به انتهای افق سرمایه‌گذاری خود، احتمال ورشکستگی را نیز کنترل نماید، پرداخته شده است. سبد اوراق بهادار مورد بررسی، شامل مجموعه‌ای از دارایی‌های ریسکی، دارایی بدون ریسک و نوعی از بدهی است. یک مدل میانگین-واریانس که دارای محدودیت کنترل ورشکستگی در افق‌های زمانی مختلف است، ارائه شده است. رویکرد حل در نظر گرفته برای مدل پیشنهادی، روش لاگرانژ افزاینده به‌مراه برنامه‌ریزی پویا است که با توجه به درجه پیچیدگی آن، الگوریتم ژنتیک برای ارائه جواب پیشنهاد می‌شود. نتایج عددی مدل با سبدهای متشکل از ۱۰ شرکت پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران، اوراق مشارکت به عنوان دارایی بدون ریسک و وام بانکی به عنوان بدهی سرمایه‌گذار، به عنوان خروجی مدل ارائه شده است. نتایج حاکی از آنست که کنترل ورشکستگی اثر پر معنایی روی استراتژی بهینه سرمایه‌گذاری دارد، به عبارت دیگر هنگامی که محدودیت کنترل ورشکستگی اعمال می‌شود، نسبت به زمانی که در نظر گرفته نمی‌شود، تعداد دفعات رسیدن به ورشکستگی کاهش چشمگیری دارد.

**واژه‌های کلیدی:** مدیریت پرتفوی، مدل میانگین واریانس، کنترل ورشکستگی،

برنامه‌ریزی پویا، الگوریتم ژنتیک.

طبقه‌بندی JEL: C22, G12, G17.

Email: kh.hassanlou@khatamt.ac.ir

۱. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه خاتم.

## ۱. مقدمه

سرمایه‌گذاری، همواره به منظور دستیابی به رفاه بیشتر در شرایط کنونی و آینده صورت می‌گیرد. در واقع، مقوله سرمایه‌گذاری با گستره و تنوع وسیعی در بازارهای مالی روبه‌رو است لذا یافتن بهترین تخصیص از دارایی‌ها که منجر به حداکثر بازده و حداقل ریسک باشد، همواره دغدغه اصلی سرمایه‌گذاران بوده است. در واقع نحوه تخصیص دارایی‌ها شیوه یا تکنیکی برای تشکیل سبد دارایی است که هدف از آن متوازن کردن ریسک این سبد و متنوع کردن محتویات آن از طریق تقسیم دارایی بین ابزارهای مختلف نظیر سهام، اوراق قرضه دولتی، اوراق قرضه شرکت‌ها و... است. هر یک از این ابزارهای سرمایه‌گذاری ریسک و بازده خاص خود را در زمانهای مختلف دارد به همین سبب تأثیرات آن بر سبد دارایی با گذشت زمان تغییر می‌کند. بنابراین تشکیل سبد اوراق بهادار به عنوان یک تصمیم‌گیری حساس و حیاتی برای سرمایه‌گذاری شناخته شده است و انتخاب یک سبد اوراق بهادار با نرخ بازده بالا و ریسک کنترل شده، یکی از موضوعاتی است که همواره مورد توجه بسیاری از محققان این حوزه قرار گرفته است.

سبد اوراق بهادار یا پرتفوی<sup>۱</sup>، در واقع مجموعه‌ای از اوراق بهادار و دارایی‌های متفاوت است که توسط فرد سرمایه‌گذار یا یک صندوق سرمایه‌گذاری تشکیل می‌شود. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد پرسش اصلی در این حوزه نحوه توزیع و تخصیص سرمایه به دارایی‌ها و تشکیل سبد اوراق بهادار و سپس مدیریت آن است.

در این مقاله تلاش شده تا با ارائه یک مدل جدید که به واسطه دارا بودن مشخصه‌هایی نظیر چند دوره‌ای بودن مدل، کنترل احتمال ورشکستگی سرمایه‌گذار قبل از رسیدن به انتهای افق زمانی، بهره‌گیری از ابزارهای مدیریت دارایی و بدهی<sup>۲</sup> (ALM) و نیز اتخاذ شیوه‌های مناسب برای مدل‌سازی و حل آن در رویارویی با درجه پیچیدگی خاص آن، بتوان گزینه‌های مناسب و کم‌خطرتری به سرمایه‌گذاران ارائه کرد. بدهی سرمایه‌گذار در

---

1. Portfolio  
2. Asset Liability Management

این پژوهش از نوع برون‌زا<sup>۱</sup> تعریف شده است. در بخش دوم مروری اجمالی از پیشینه تحقیق ارائه شده است. در بخش سوم، مدل پیشنهادی و رویکرد مناسبی جهت حل آن ارائه شده است. برای اجرای مدل توسعه‌یافته از داده‌های واقعی استفاده شده و تحلیل نتایج خروجی و اعتبارسنجی انجام گرفته بر روی نتایج در بخش چهارم مقاله جای گرفته است. نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات نیز در بخش‌های این پژوهش ارائه می‌شود.

## ۲. پیشینه تحقیق

در بررسی سیر تاریخی سرمایه‌گذاری به سه مرحله مشخص از تئوری پردازی از این رشته از دانش بشری تحت عناوین تئوری‌های سنتی<sup>۲</sup>، تئوری‌های مدرن<sup>۳</sup> و تئوری‌های نوین<sup>۴</sup> برخورد می‌شود (اسلامی بیدگلی و دیگران ۱۳۸۴). اگرچه بشر از قرن‌ها قبل با مقوله سرمایه‌گذاری سر و کار داشته ولی در انتخاب سرمایه‌گذاری‌ها از میان سرمایه‌گذاری‌های رقیب<sup>۵</sup> از اواسط قرن نوزدهم قابل پیگیری است، و با رشد و توسعه تدریجی کشورها و در روابط تجاری بین‌المللی این تئوری‌ها نیز مورد ارزیابی، نقد و گسترش قرار گرفته‌اند. نهایتاً اینکه تئوری‌های سنتی سرمایه‌گذاری از دهه ۱۹۲۰ و با معرفی ارزش زمانی پول مورد نقد قرار گرفته و متعاقب آن ساختار انتخاب و ارزیابی طرح‌های سرمایه‌گذاری با آنچه که در گذشته بوده از برخی جهات متفاوت شده است. تنوع‌سازی و مدیریت سبد اوراق بهادار از واژه‌های نوظهور دوره تئوری‌های مدرن محسوب می‌شدند.

نخستین رویکرد علمی برای انتخاب یک سبد اوراق بهادار بهینه، مدل میانگین واریانس<sup>۶</sup> نامیده شد که توسط هری مارکوویتز در سال ۱۹۵۲ ارائه شد و توانست نقش کلیدی در تئوری انتخاب سبد اوراق بهادار ایفا کرده و جایزه نوبل اقتصادی را برای وی به ارمغان آورد. مدل وی به عنوان متداول‌ترین رویکرد در مسأله انتخاب سرمایه‌گذاری است. از

- 
1. Exogenous Liability
  2. Conventional Theories
  3. Modern Theories
  4. New Theories
  5. Competitive Investment
  6. Mean- Variance

برجسته‌ترین نکات مورد توجه در مدل مارکویتز، توجه به ریسک سرمایه‌گذاری، نه تنها بر اساس معیار یک سهم، بلکه بر اساس ریسک مجموعه سرمایه‌گذاری است. مدل مارکویتز یک مدل تک دوره‌ای است که درگیر مفروضات فراوانی است و همواره تلاش محققان بسیاری را برای بهبود مدل و رفع محدودیت‌های مجذوب خود ساخته است (مارکویتز ۱۹۵۲، ۱۹۵۶ و ۱۹۵۹).

تحقیقات صورت گرفته در این حوزه، فراوان است ولی در اینجا سعی شده به برخی از آنها که مرتبط با حوزه مورد بررسی در این پژوهش است به اختصار و با حفظ سیر تاریخی آن اشاره شود.

دون لی و وان لانگ (۲۰۰۰) یک حل بهینه تحلیلی برای فرمول میانگین - واریانس در انتخاب سبد اوراق بهادار چند دوره‌ای ارائه کردند. آنها یک الگوریتم کارا برای پیدا کردن سیاست سبد اوراق بهادار بهینه جهت حداکثر سازی تابع مطلوبیت از میانگین و واریانس سرمایه‌ی نهایی پیشنهاد کردند. در همان سال ژو ولی (۲۰۰۰) در پژوهش خود اقدام به ارائه مدل میانگین واریانس با زمان پیوسته با رویکرد برنامه ریزی تصادفی نمودند. مارکوس و دیگران (۲۰۰۲) توانستند از تکنیک‌های مدیریت دارایی و بدهی برای بهینه‌سازی مدل میانگین - واریانس که دارای بدهی‌های درون‌زا و برون‌زا<sup>۱</sup> است، استفاده کنند. مارکوس و همکارانش در سال ۲۰۰۴، ر راستای تکمیل تحقیقات خود، رویکرد هندسی را برای بهینه‌سازی مدل میانگین - واریانس چند دوره‌ای از دارایی‌ها و بدهی‌ها پیشنهاد کردند (مارکوس و دیگران، ۲۰۰۴). بلکی و دیگران (۲۰۰۵) بر روی مسأله انتخاب سبد اوراق بهادار با زمان پیوسته همراه با ممنوعیت ورشکستگی تحت چارچوب میانگین - واریانس کار کردند. مشابه همین تحقیق در سال ۲۰۰۶ توسط چپو و لی برای مدیریت دارایی و بدهی با رویکرد حل متفاوت ارائه شد (چپو و لی، ۲۰۰۶). لی و دیگران در سال ۲۰۰۸ افق سرمایه‌گذاری غیرقطعی<sup>۲</sup> را برای مسأله بهینه‌سازی سبد اوراق بهادار چند دوره‌ای در نظر گرفتند و مدیریت دارایی و بدهی را با این فرض، به خوبی انجام دادند (لی

1. Exogenous and Endogenous Liabilities  
2. Uncertain Investment Horizon

مدیریت پرتفوی چنددوره‌ای همراه با کنترل ورشکستگی ... □ ۲۱۱

و دیگران، ۲۰۰۸). جونز و براون در سال ۲۰۰۹ میلادی مفهوم مدیریت ریسک دارایی و بدهی را مسأله بهینه‌سازی مدل میانگین واریانس چند دوره‌ای همراه کردند (جونز و براون، ۲۰۰۹).

از آنجا که فرآیندهای بازار مالی از جمله معاملات، تغییرات قیمت سهم و ... ماهیتی کاملاً تصادفی دارند، لذا ورود مدل‌های فرآیندهای تصادفی به این حوزه، ناگزیر است. در همین راستا تحقیقات فراوانی صورت گرفته که برخی از موضوعات مرتبط با پژوهش، عبارتند از: زی (۲۰۰۹) مسأله مدیریت دارایی و بدهی را تحت مدل مارکوف رژیم سوئیچینگ با زمان پیوسته، مورد بررسی قرار می‌دهد. در سال ۲۰۱۱ نیز چن و یانگ مدیریت دارایی و بدهی میانگین- واریانس چند دوره‌ای را همراه با رژیم سوئیچینگ بررسی کردند که توانستند رویکرد جدیدی برای پیدا کردن استراتژی بهینه ارائه کنند (چن و یانگ، ۲۰۱۱).

سیدحسینی و حسلو (۲۰۱۰ و ۲۰۱۱) طی پژوهش‌هایی که روی مسأله بهینه‌سازی سبد توراق بهادار انجام دادند، توانستند با در نظر گرفتن نرخ‌های متفاوت برای وام‌دهی<sup>۱</sup> و وام‌گیری<sup>۲</sup>، و اتخاذ رویکرد مناسب در رویارویی با عدم قطعیت موجود در ماهیت مسائل سرمایه‌گذاری، چندین مدل موفق و کاربردی در این حوزه ارائه نمایند.

ژانگ و در لی (۲۰۱۲) مدل میانگین واریانس چنددوره‌ای جدیدی را ارائه کردند که در آن علاوه بر اینکه افق زمانی غیرقطعی فرض شده، نرخ‌های بازده نیز به صورت متوالی همبسته هستند. همان سال، لی و لی (۲۰۱۲) یک مدل میانگین واریانس چند دوره‌ای را برای مدیریت بدهی و دارایی سرمایه‌گذار ارائه می‌کنند که همزمان تلاش می‌شود که احتمال ورشکستگی سرمایه‌گذار را نیز کنترل کند. رویکرد حل این مقاله مرجع اصلی پژوهش حاضر در نظر گرفته شده که سعی شده با بهبود مدل لی، بتوان تصمیمات سرمایه‌گذاری بهتری را پیش روی سرمایه‌گذاران گذاشت.

- 
1. Lending
  2. Borrowing

همانطور که پیشتر نیز اشاره شد در این مقاله قصد آن را داریم که یک مدل چنددوره‌ای برای بهینه‌سازی سبدهی متنوع از دارایی‌ها ارائه کنیم که همزمان ورشکستگی سرمایه‌گذار نیز تحت کنترل بوده و علاوه بر دارایی‌های بدهی او نیز مدیریت می‌شود. برای حل مدل رویکرد ریاضی کاملی ارائه خواهد شد که توسط داده‌های واقعی از بازار بورس اوراق بهادار تهران، خروجی مدل نیز پشتیبانی می‌شود.

### ۳. مدل پیشنهادی تحقیق

قبل از ارائه مدل پیشنهادی، پارامترها و متغیرهای مدل معرفی می‌شوند. در ابتدا فرض می‌کنیم که فقط یک دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک داریم و سپس مدل را به  $n$  دارایی ریسکی توسعه می‌دهیم. سرمایه‌گذار در نظر دارد یک طرح برای تخصیص سرمایه خود میان این دو دارایی در یک افق زمانی  $T$  دوره بسازد. سرمایه‌گذار در شروع هر دو دوره می‌تواند سبد اوراق بهادار خود را بازگردانی<sup>۱</sup> کند. منظور از بازگردانی، تغییر در ترکیب دارایی‌های سبد اوراق بهادار است. یک فرض اساسی در مدل این است که دارایی ریسکی و دارایی بدون ریسک و بدهی در بین زمان‌های مختلف از نظر آماری مستقل هستند. پارامترهای مدل عبارتند از:

$T$  = تعداد دوره‌های سرمایه‌گذاری

$x_t$ : کل دارایی در زمان  $t$ ; ( $t = 0, 1 \dots T$ )

$u_t$ : میزان سرمایه‌گذاری در دارایی نوع اول (ریسکی) با نرخ بازگشت  $\tilde{r}_t$  در زمان  $t$ ;  
( $t = 0, 1 \dots T$ );

$l_t$ : میزان بدهی در زمان  $t$ ; ( $t = 0, 1 \dots T$ )

$S_t$ : دارایی خالص در زمان  $t$ ;  $S_t = x_t - l_t$  ( $t = 0, 1 \dots T$ )

$\tilde{r}_t$ : نرخ بازگشت دارایی نوع اول (ریسکی); ( $t = 0, 1 \dots T$ );

$r_t^0$ : نرخ بازگشت دارایی نوع دوم (بدون ریسک); ( $t = 0, 1 \dots T$ );

$q_t$ : نرخ بهره بدهی; ( $t = 0, 1 \dots T$ );

$\omega t > 0$ : درجه ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار در زمان  $t$ ;  $(t = 0, 1, \dots, T)$

$b_t$ : حد اقل سود از پیش تعریف شده در دوره  $t$  (سطح فاجعه در دوره  $t$ )

$(t = 0, 1, \dots, T)$ ;

در هر دوره زمانی برای دارایی ریسکی و دارایی بدون ریسک رابطه پویای زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= r_t^\circ (x_t - u_t) + \tilde{r}_t u_t = r_t^\circ x_t - r_t^\circ u_t + \tilde{r}_t u_t = r_t^\circ x_t + (\tilde{r}_t - r_t^\circ) u_t \\ &\Rightarrow x_{t+1} = r_t^\circ x_t + r_t^1 u_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1) \end{aligned} \quad (1)$$

بدهی در مدل مربوطه، برون‌زا است بنابراین غیر قابل کنترل است و مستقل از سبد اوراق بهادار مورد نظر بوده و بدهی خود سرمایه‌گذار است که باید نحوه‌ی پرداخت بهره و اصل آن را مدیریت کند. رابطه داینامیک بدهی نیز در هر دوره زمانی به صورت زیر است:

$$l_{t+1} = q_t \cdot l_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1) \quad (2)$$

با توجه به روابط بالا مدل میانگین واریانس کلاسیک برای مسئله مدیریت دارایی و بدهی چند دوره‌ای  $P(\text{GMV}(\omega_T))$  به صورت زیر است که همزمان به حداکثرسازی بازده انتظاری و حداقل‌سازی ریسک پرتفوی می‌پردازد:

(۳)

$$P(1): \underset{u}{\text{Max}} \quad E[S_T] - \omega_T \text{Var}(S_T)$$

Subject to:

$$x_{t+1} = r_t^\circ x_t + r_t^1 u_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$$l_{t+1} = q_t \cdot l_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$\omega_T > 0$  بوده و پارامتری معلومی است که نشان‌دهنده‌ی درجه ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار است. در واقع پارامتری برای تبادل دو هدف ناسازگار از حداکثرسازی بازگشت مورد انتظار (مساله ۱) و حداقل‌سازی ریسک (مساله ۲) تعریف شده است.

### ۳-۱. مدل تعمیم یافته

اگر محدودیت کنترل ورشکستگی را به مدل قبل اضافه کنیم، مدل میانگین-واریانس تعمیم یافته<sup>۱</sup>  $P(\text{GMV}(\omega_T, \alpha))$  بدست می‌آید. ورشکستگی زمانی اتفاق می‌افتد که مازاد کل کم تر از سطح پیش تعریف شده (فاجعه) در هر دوره باشد. به خاطر همین است که سرمایه‌گذار در ادامه سرمایه‌گذاری خود نباید به سمت ورشکستگی برود. بنابراین احتمال رفتن به سمت ورشکستگی سرمایه‌گذار در دوره  $t$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$P(BR_t) = P(S_t \leq b_t, S_j > b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, t-1)) \quad (4)$$

داریم:  $BR_t \cap BR_j = \emptyset$ ، بنابراین کل احتمال ورشکستگی در افق زمانی سرمایه

گذار برابر است با:  $\sum_{t=1}^{T-1} P(BR_t)$  و براساس نامساوی چبی شف، داریم:

$$P(S_t \leq b_t) \leq \frac{\text{Var}(S_t)}{(E[S_t] - b_t)^2} \quad (5)$$

پس ما می‌توانیم، ریسک ورشکستگی در دوره  $t$  را به وسیله  $\alpha_t \in (0, 1)$  و محدودیت

، کنترل کنیم. بنابراین مدل تعمیم یافته  $P(\text{GMV}(\omega_T, \alpha))$ ،  $\frac{\text{Var}(S_t)}{(E[S_t] - b_t)^2}$  به صورت زیر خواهد بود:

(۶)

$$P(2) : \underset{u}{\text{Max}} \quad E[S_T] - \omega_T \text{Var}(S_T)$$

Subject to:

$$x_{t+1} = r_t^0 x_t + r_t^1 u_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$$l_{t+1} = q_t l_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$$\text{Var}(S_t) \leq \alpha_t (E[S_t] - b_t)^2 \quad (t = 1, 2, \dots, T-1)$$



درمدل بالا پارامترهای  $\omega_T$  و  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{T-1})' \in R_+^{T-1}$  منعکس کننده نگرش سرمایه‌گذار نسبت به ریسک می‌باشند و بایستی قبل از جستجو برای استراتژی سبد اوراق بهادار پویای بهینه مشخص شده باشد.

### ۲-۳. حل مدل تعمیم یافته

برای حل مدل میانگین-واریانس تعمیم یافته، ابتدا از رویکرد دوگان لاگرانژین پیشنهاد می‌شود. فرض رویکرد دوگان، این است که حل غیر مستقیم مساله اولیه توسط حل مساله ثانویه صورت می‌گیرد. برای حل مساله ثانویه ابتدا نیاز به حل مساله لاگرانژین  $P(LMV(\omega, \omega_T, \alpha))$  داریم که در زیر فرمول مساله لاگرانژین آورده شده است:

(۷)

$$P(3) \underset{u}{Max} \quad E[S_T] - \omega_T Var(S_T) - \sum_{t=1}^{T-1} \omega_t [Var(S_t) - \alpha_t (E[S_t] - b_t)^2]$$

Subject to:

$$x_{t+1} = r_t^0 x_t + r_t^1 u_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$$l_{t+1} = q_t l_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

در مدل بالا  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{T-1})'$ ، ضرایب غیر منفی لاگرانژین می‌باشند. رویکرد برنامه ریزی پویا را نمی‌توان به طور مستقیم برای مساله لاگرانژین استفاده کرد زیرا جمله‌های مسئله بالا برای برنامه‌ریزی پویا، قابل تفکیک نیست. یعنی  $Var(S_t)$  شامل تابع غیر خطی از  $E[S_t]$  است:

$$Var(S_t) = E(S_t^2) - E^2(S_t) \quad (۸)$$

از اینرو به وسیله تکنیک محاط کردن<sup>۱</sup> یک مساله کمکی  $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$ ، برای مساله لاگرانژین به صورت زیر خواهیم داشت:

(۹)

$$P(4): \underset{u}{\text{Max}} E \left[ \sum_{t=1}^T \left( \lambda_t S_t - \omega_T (S_t)^2 \right) \right]$$

Subject to:

$$x_{t+1} = r_t^0 x_t + r_t^1 u_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$$l_{t+1} = q_t l_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

در مدل بالا بردار  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_T)'$ ، برداری از پارامترهای کمکی است.

اگر  $\omega_T$  برای  $t \in \{1, 2, \dots, T-1\}$ ، برابر صفر باشد آنگاه  $\lambda_t$  هم برابر صفر خواهد بود. فرض در مباحث گفته شده بدین صورت است که  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{T-1} \geq 0$  می باشد.

### ۳-۳. حل مسأله کمکی

برای حل مسأله کمکی  $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$  به نمادسازی زیر نیاز داریم:

(۱۰)

$$Z_t = \begin{pmatrix} x_t \\ l_t \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} r_t^0 & 0 \\ 0 & q_t \end{pmatrix}, \quad A_t = \begin{pmatrix} r_t^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

با توجه ماتریس‌های تعریف شده، مسأله کمکی  $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$  به صورت زیر

تبدیل می‌شود:

(۱۱)

$$P(5): \underset{u}{\text{Max}} E \left[ \sum_{t=1}^T (\lambda_t e' Z_t - \omega_t Z_t' e e' Z_t) \right]$$

Subject to:

$$Z_{t+1} = B_t Z_t + A_t e_1 u_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

حل مسأله فوق با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی پویا در قالب قضیه زیر به اختصار در

قالب قضیه زیر بیان شده است (بازارا و شتی، ۱۹۷۶).

قضیه ۱) استراتژی بهینه برای مساله کمکی  $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$  به صورت زیر می باشد:

$$u_t^*(\lambda, \omega) = \frac{1}{2} \frac{E[e'_t A_t F_{t+1}]}{E[e'_t A_t \bar{D}_{t+1} \bar{D}_{t+1} A_t e_t]} - \frac{E[e'_t A_t \bar{D}_{t+1} \bar{D}_{t+1} B_t Z_t]}{E[e'_t A_t \bar{D}_{t+1} \bar{D}_{t+1} A_t e_t]}; (t=0, 1 \dots T-1) \quad (12)$$

$$\bar{D}_t = \left( \omega_t^1 \bar{B}_t^{T-t-1} e, \dots, \omega_t^2 \bar{B}_t^{s-t-1} e, \dots, \omega_{t+1}^2 \bar{B}_t^0 e, \omega_t^2 e \right), (t=0, 1 \dots T-1) \quad (13)$$

$$F_t = \begin{pmatrix} + \sum_{s=t+1}^T \bar{r}_t^{s-t-1} \lambda_s + \lambda_t \\ - \sum_{s=t+1}^T \bar{q}_t^{s-t-1} \lambda_s - \lambda_t \end{pmatrix}, \bar{B}_t = \begin{pmatrix} \bar{r}_t^0 & 0 \\ 0 & \bar{q}_t^0 \end{pmatrix}, \bar{B}_t^i = \begin{pmatrix} \bar{r}_t^i & 0 \\ 0 & \bar{q}_t^i \end{pmatrix} (t=0, 1 \dots T-1) \quad (14)$$

$$; (t=0, 1 \dots T-1) \quad (15)$$

$$\bar{r}_t^0 = r_t^0 - r_t^1 \frac{E[r_t^1 r_t^0]}{E[(r_t^1)^2]}, \bar{r}_t^i = r_t^0 \bar{r}_{t+1}^{i-1} - r_t^1 \bar{r}_{t+1}^{i-1} \frac{E[r_t^1 r_t^0]}{E[(r_t^1)^2]},$$

$$; (t=0, 1 \dots T-1) \quad (16)$$

$$\bar{q}_t^0 = q_t - r_t^1 \frac{E[r_t^1 q_t]}{E[(r_t^1)^2]} \frac{E\left[\sum_{s=t+2}^T \bar{r}_{t+1}^{s-t-2} \bar{q}_{t+1}^{s-t-2} \omega_s + \omega_{t+1}\right]}{E\left[\sum_{s=t+2}^T (\bar{r}_{t+1}^{s-t-2})^2 \omega_s + \omega_{t+1}\right]},$$

$$(t=0, 1 \dots T-1); \quad (17)$$

$$\bar{q}_t^i = q_t \bar{q}_{t+1}^{i-1} - r_t^1 \bar{r}_{t+1}^{i-1} \frac{E[r_t^1 q_t]}{E[(r_t^1)^2]} \frac{E\left[\sum_{s=t+2}^T \bar{r}_{t+1}^{s-t-2} \bar{q}_{t+1}^{s-t-2} \omega_s + \omega_{t+1}\right]}{E\left[\sum_{s=t+2}^T (\bar{r}_{t+1}^{s-t-2})^2 \omega_s + \omega_{t+1}\right]},$$

برای  $i=1, \dots, T-t-1$  و اگر  $s > t$  باشد روابط زیر قابل تعریف است:

$$\prod_{j=s}^t (0)_j = 0 \quad \text{و} \quad \prod_{j=s}^t (0)_j = 1$$

برای مشاهده اثبات این قضیه به (بازارا و شتی، ۱۹۷۶) مراجعه شود.

### ۳-۴. رابطه بین مساله لاگرانژین و مساله کمکی

برای بیان رابطه بین مساله لاگرانژین  $P(LMV(\omega, \omega_T, \alpha))$  و مساله کمکی  $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$  به قضیه زیر نیاز است (لی، ۲۰۱۲ و ژو، ۲۰۰۴)

قضیه ۲) رابطه مساله لاگرانژین  $P(LMV(\omega, \omega_T, \alpha))$  و مساله کمکی  $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$  به صورت زیر می باشد:

الف) اگر  $u^*(\omega) \in \Phi_L(\omega, \omega_T, \alpha)$  باشد، آنگاه  $u^*(\omega) \in \Phi_A(\lambda^*, \omega, \omega_T)$  می باشد. در جاییکه  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_T^*)$  و داریم:

$$\lambda_t^* = -2\omega_t \alpha_t b_t + 2\omega_t (1 + \alpha_t) E[S_t] |_{u^*(\omega)} \quad (t = 1, 2, \dots, T-1) \quad (18)$$

$$\lambda_T^* = 1 + 2\omega_T E[S_T] |_{u^*(\omega)} \quad (19)$$

ب) با فرض اینکه داشته باشیم  $u^*(\lambda^*, \omega) \in \Phi_A(\lambda^*, \omega, \omega_T)$ ، شرط ضروری برای  $u^*(\lambda^*, \omega) \in \Phi_L(\omega, \omega_T, \alpha)$  این است که:

$$\lambda_t^* = -2\omega_t \alpha_t b_t + 2\omega_t (1 + \alpha_t) E[S_t] |_{u^*(\lambda^*, \omega)} \quad (t = 1, 2, \dots, T-1) \quad (20)$$

$$\lambda_T^* = 1 + 2\omega_T E[S_T] |_{u^*(\lambda^*, \omega)} \quad (21)$$

برای مشاهده اثبات این قضیه به پیوست (بازارا و شتی، ۱۹۷۶) مراجعه شود.

اگر کنترل ورشکستگی را در نظر نگیریم، بردار افزایشده لاگرانژ یک  $\lambda$  مناسب که قادر می سازد از حل مساله کمکی  $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$  به حل بهینه از مساله لاگرانژین  $P(L(\omega, \omega_T, \alpha))$  برسیم، به عنوان یک نتیجه یک استراتژی بهینه از مدیریت دارایی و بدهی بدون کنترل ورشکستگی به وسیله جانشین کردن  $\lambda, \omega$  در رابطه (۱) بدست می آید. در این مورد مسائل

$P(L(\omega, \omega_T, \alpha)), P(GMV(\omega_T)), P(MV(\omega_T))$  یکسان هستند.

### ۳-۵. حل مساله لاگرانژین

در این قسمت، ما به حل مساله لاگرانژین  $P(L(\omega, \omega_T, \alpha))$  بعد از پیدا کردن رابطه بین مساله لاگرانژین و مساله کمکی، خواهیم پرداخت. طبق قضیه ۲، داریم:

$$\Phi_L(\omega, \omega_T, \alpha) \subseteq U_\lambda \Phi_A(\lambda, \omega, \omega_T) \quad (22)$$

طبق قضیه ۱، یک راه حل بهینه از مساله کمکی  $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$  برای هر  $\lambda$ ، ارائه شده است. تنها نیاز ما پیدا کردن برآورد  $\lambda$  که بتواند حل بهینه از مساله کمکی را به ما بدهد که به دنبال آن به حل مساله لاگرانژین برسیم.

اگر ماتریسی به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\Psi = \text{diag} [2\omega_1(1 + \alpha_1), \dots, 2\omega_{T-1}(1 + \alpha_{T-1}), 2\omega_T] \quad (23)$$

تابع  $\text{diag}$  برای ساختن یک ماتریس قطری استفاده می‌شود. یعنی اعضای ماتریسی که به عنوان ورودی به آن داده شده است را روی قطر اصلی ماتریس خروجی گذاشته و بقیه اعضا را مساوی صفر می‌گذارد.

به واسطه روابط (۱۴) و قضیه ۲ و با شرط وارون‌پذیری  $\Psi$ ، داریم:

$$(\Lambda - \Psi^{-1}) \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_{T-1}^* \\ \lambda_T^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E[e' \bar{B}_0 Z_0] \\ \vdots \\ E[e' \bar{B}_{T-1} Z_0] \end{pmatrix} - \Psi^{-1} \begin{pmatrix} -2\omega_1 \alpha_1 b_1 \\ \vdots \\ -2\omega_{T-1} \alpha_{T-1} b_{T-1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

بنابراین ما به  $\lambda^*$  نیاز داریم که می‌توان توسط راهنمای زیر  $\lambda^*$  را بدست آوریم:  
راه اول) اگر ماتریس  $(\Lambda - \Psi^{-1})$ ، غیر منفرد<sup>۱</sup> باشد،  $\lambda^*$  را می‌توان توسط حل سیستم معادلات خطی رابطه (۱۸) بدست آورد (ماتریس غیر منفرد، ماتریس مربعی می‌باشد که دترمینان آن صفر نباشد و ماتریس معکوس پذیر باشد).

1. Nonsingular

راه دوم) اگر ماتریس  $(\Lambda - \Psi^{-1})$ ، منفرد<sup>۱</sup> باشد،  $\lambda^*$  را می‌توان توسط حل مساله زیر بدست آورد: (ماتریس منفرد، ماتریس مربعی می‌باشد که دترمینان آن صفر باشد و ماتریس معکوس پذیر نباشد).

$$P(6): \text{Max}_{\lambda} \left\{ E[S_T] - \omega_T \text{Var}(S_T) - \sum_{t=1}^{T-1} \omega_t [\text{Var}(S_T) - \alpha_t (E[S_T] - b_t)^2] \right\} \Big| u^* \quad (25)$$

Subject to:

$$\lambda \quad \text{satisfies}$$

جائیکه  $u^* = u^*(\lambda, \omega) \in \Phi_A(\lambda, \omega, \omega_T)$  و تابع هدف، سطحی از تابع هدف مساله لاگرانژ  $P(L(\omega, \omega_T, \alpha))$  تحت استراتژی  $u^*(\lambda, \omega)$  است. به طور خاص داریم: اگر رتبه ماتریس  $(\Lambda - \Psi^{-1})$  برابر  $T-1$  باشد یعنی  $\text{Rank}(\Lambda - \Psi^{-1}) = T-1$  باشد می‌توان  $\lambda^*$  بهینه را توسط روش جستجوی خطی محاسبه کرد. اگر رتبه ماتریس  $(\Lambda - \Psi^{-1})$  کمتر از  $T-1$  باشد یعنی  $\text{Rank}(\Lambda - \Psi^{-1}) < T-1$  باشد می‌توان  $\lambda^*$  بهینه را توسط روش افزایشده لاگرانژین<sup>۲</sup> محاسبه کرد. بعد از اینکه  $\lambda^*$  را بدست آوردیم، آن را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم و نتیجه، استراتژی بهینه برای مساله لاگرانژین  $P(L(\omega, \omega_T, \alpha))$  می‌باشد.

### ۳-۶. حل مدل میانگین-واریانس تعمیم یافته

در نهایت در این قسمت به حل مدل میانگین-واریانس تعمیم یافته  $P(GMV(\omega_T, \alpha))$  می‌پردازیم. از آنجا که  $P(L(\omega, \omega_T, \alpha))$ ، مساله لاگرانژین از  $P(GMV(\omega_T, \alpha))$  است و حل مساله  $P(L(\omega, \omega_T, \alpha))$  را داریم، تنها کار باقی مانده جستجو برای بردار افزایشده لاگرانژین<sup>۳</sup> مناسب که حل بهینه از مساله اولیه  $P(GMV(\omega_T, \alpha))$  می‌توان توسط حل بهینه از مساله لاگرانژین  $P(L(\omega, \omega_T, \alpha))$  بدست آورد.

1. Singular
2. Lagrangian Multiplier Method
3. Lagrangian Multiplier Vector

روش اولیه - ثانویه برای حل مساله پیشنهاد می‌شود. مساله ثانویه لاگرانژین  $P(LD(\omega_T, \alpha))$  به صورت زیر است:

$$P(y): \underset{\omega \geq 0}{\text{Min}} H(\omega) = \underset{u}{\text{Max}} \quad E[S_T] - \omega_T \text{Var}(S_T) - \sum_{t=1}^{T-1} \omega_t [ \text{Var}(S_t) - \alpha_t (E[S_t] - b_t)^2 ] \quad (26)$$

در بالا، تابع ثانویه  $H(\omega)$  برابر است با حداکثر کردن سطحی از  $P(L(\omega, \omega_T, \alpha))$  برای بدست آوردن  $\omega$ ، و یک تابع محدب می‌باشد.

با روش اولیه - ثانویه، حل غیر مستقیم مساله اولیه  $P(GMV(\omega_T, \alpha))$  را توسط حل مساله ثانویه  $P(LD(\omega_T, \alpha))$  انجام می‌دهیم. وقتی  $\omega = \bar{\omega}$  است، با فرض اینکه  $\bar{u}(\bar{\omega})$ ، استراتژی بهینه برای  $P(L(\bar{\omega}, \omega_T, \alpha))$  است با ارائه تعریف زیر برای تابع  $g$ ، برای  $t = 1, 2, \dots, T-1$  خواهیم داشت:

$$g(\bar{\omega}; \bar{u}) = (g_1(\bar{\omega}; \bar{u}), \dots, g_{T-1}(\bar{\omega}; \bar{u}))' \quad (27)$$

$$g_t(\bar{\omega}; \bar{u}) = \begin{cases} [\text{Var}(S_t) - \alpha_t (E[S_t] - b_t)^2] & \left| \bar{u}(\bar{\omega}) \right. & ; \bar{\omega}_t > 0 \\ \text{Max} \left\{ 0, [\text{Var}(S_t) - \alpha_t (E[S_t] - b_t)^2] \right\} & \left| \bar{u}(\bar{\omega}) \right. & ; \bar{\omega}_t = 0 \end{cases}$$

مطابق قضیه ۱-۴-۶، کتاب برنامه ریزی غیر خطی، نوشته بازاراوشتی (۱۹۷۶)، داریم: اگر  $g(\bar{\omega}; \bar{u}) \neq 0$  باشد، آنگاه  $g(\bar{\omega}; \bar{u})$  یک مسیر نزول قابل قبول<sup>۱</sup> از  $H(\omega)$  برحسب  $\bar{\omega}$  می‌باشد و اگر  $g(\bar{\omega}; \bar{u}) = 0$  باشد، آنگاه  $\bar{\omega}$  حل بهینه مساله  $P(LD(\omega_T, \alpha))$  می‌باشد و  $\bar{u}(\bar{\omega})$  استراتژی پرتفوی بهینه از  $P(GMV(\omega_T, \alpha))$  می‌باشد.

در آخرین مورد، به واسطه تئوری ثانویه لاگرانژین طبق قضیه ۱-۵-۶ در کتاب برنامه ریزی غیر خطی نوشته بازاراوشتی (۱۹۷۶)،  $\bar{\Pi}(\bar{\omega})$ ، استراتژی پرتفوی بهینه از مساله  $P(GMV(\omega_T, \alpha))$  می‌باشد.

#### 1. Feasible Descent Direction

بر اساس بحث‌های صورت گرفته در بالا، الگوریتم تکرار شونده اولیه - ثانویه به صورت زیر می‌باشد:

قدم اول) نقطه ابتدائی را به عنوان  $\omega^0 \geq 0$ ، انتخاب می‌کنیم و همچنین عدد بسیار کوچک  $\varepsilon > 0$  را لحاظ می‌کنیم و  $k=0$  قرار می‌دهیم.

قدم دوم) مساله کمکی  $P(A(\lambda, \omega^k, \omega_T))$  را حل می‌کنیم تا به  $u(\lambda, \omega^k)$  برسیم.  
 قدم سوم) مساله لاگرانژین  $P(L(\omega^k, \omega_T, \alpha))$  را حل کرده تا به  $u^k(\omega^k)$  که همان استراتژی بهینه است برسیم.

قدم چهارم) اگر  $|g_t(\omega^k, u^k)| \leq \varepsilon$  برای  $t = 1, 2, \dots, T-1$  آنگاه به قدم ششم می‌رویم و اگر  $|g_t(\omega^k, u^k)| > \varepsilon$  برای  $t = 1, 2, \dots, T-1$  باشد به قدم پنجم می‌رویم.

قدم پنجم) حل مساله بهینه سازی در قدم دوم و  $\omega^{k+1}$  و قرار دادن  $k = k + 1$   
 قدم ششم) توقف کرده و  $u^k(\omega^k), \omega^k$  که حل‌های بهینه از مساله ثانویه لاگرانژین  $P(LD(\omega_T, \alpha))$  و مساله لاگرانژین  $P(L(\omega^k, \omega_T, \alpha))$  هستند را استخراج می‌کنیم.  
 مساله بهینه سازی قدم دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$P(8): \underset{\delta}{\text{Min}} \quad H(\omega^k + \delta.g(\omega^k; u^k)) \quad (28)$$

Subject to:

$$\begin{aligned} \omega^k + \delta.g(\omega^k; u^k) &\geq 0 \\ \delta &\geq 0 \end{aligned}$$

$\delta^k$ ، حل بهینه می‌باشد و  $\omega^{k+1} = \omega^k + \delta^k g(\omega^k; u^k)$ ،  $K = K + 1$  و به قدم اول بر می‌گردیم.

بر اساس قسمت ۶،۴ برنامه ریزی غیر خطی بازارا و شتی (۱۹۷۶)، دو حالت رخ می‌دهد: حالت اول) اگر در قدم دوم الگوریتم فوق، یک حل بهینه محدود  $\delta^k$  وجود نداشت، به این نتیجه خواهیم رسید که توقف کرده و به دنبال آن مساله ثانویه نامحدود و مساله اولیه نشدنی می‌باشد.



حالت دوم) اگر در قدم دوم الگوریتم فوق، حل محدود  $\delta^K$  باشد اما نتوان به هر  $\delta$  منحصر به فرد دست پیدا کرد، به این نتیجه خواهیم رسید که  $\delta^K$  باید عدد به اندازه کافی بزرگ بدست آید.

برای حل مساله بهینه سازی در قدم دوم، روش تابع جریمه<sup>۱</sup> را بکار می‌گیریم. این روش را می‌توان به عنوان یک مورد خاص از تنظیم تیخونوف<sup>۲</sup> در نظر گرفت. در واقع، با انتخاب پارامتر جریمه به اندازه کافی بزرگ، راه حل مساله جریمه را می‌توان کاملاً نزدیک به راه حل مساله اصلی کرد (بازار و شتی، ۱۹۷۶). به طور خلاصه، رابطه بین مسائل  $P(L(\omega^k, \omega_T, \alpha))$ ،  $P(GMV(\omega_T, \alpha))$  و  $P(LD(\omega_T, \alpha))$  به شکل زیر قابل بیان است.

قضیه ۳) فرض کنید که  $\bar{\omega}$ ، حل بهینه از مساله  $P(LD(\omega_T, \alpha))$  باشد و همچنین فرض کنید  $\bar{u}(\bar{\omega})$ ، حل بهینه از مساله  $P(L(\omega^k, \omega_T, \alpha))$  باشد، آنگاه  $\bar{u}(\bar{\omega})$ ، حل بهینه از مساله  $P(GMV(\omega_T, \alpha))$  خواهد بود.

### ۳-۷. مدل پیشنهادی توسعه یافته

همانطور که پیشتر نیز اشاره شد، هدف نهایی پژوهش، توسعه مدلی با تنوع در دارایی های ریسکی است لذا مدل تعمیم یافته پیشنهادی که تنها دارای یک دارایی ریسکی بود را توسعه داده و در حالت کلی  $n$  دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک برای مدل، در نظر گرفته می‌شود. لذا برخی از پارامترهای مدل با تغییر کمی به صورت زیر قابل تعریف است:

$$u_i^j = \text{میزان سرمایه گذاری در دارایی ریسکی } i \text{ ام با نرخ بازگشت } \tilde{r}_i^j \text{ در دوره } t$$
$$\tilde{r}_i^j = \text{نرخ بازگشت دارایی ریسکی } i \text{ ام در دوره } t$$

با اضافه کردن فرض جدید، محدودیت اول مدل تعمیم یافته تغییر کرده و مدل جدید بصورت زیر قابل ارائه است:

---

1. Penalty Function Method  
2. Tikhonov Regularization

$$P(9): \underset{u}{\text{Max}} \quad E[S_T] - \omega_T \text{Var}(S_T) \quad (29)$$

Subject to:

$$x_{t+1} = r_t^\circ x_t + \sum_{j=1}^n (\tilde{r}_t^j - r_t^\circ) u_t^j \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$$l_{t+1} = q_t l_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$$\text{Var}(S_t) \leq \alpha_t (E[S_t] - b_t)^2 \quad (t = 1, 2, \dots, T-1)$$

#### ۴. داده‌ها و نتایج تجربی

برای اجرای مدل نیاز به سه گروه داده به عنوان ورودی داریم: نرخ بازده دارایی ریسکی، نرخ بازده دارایی بدون ریسک و نرخ بهره بانکی که برای تأمین آنها از داده‌های واقعی به شرح زیر استفاده شد:

برای اجرای مدل فرض شد که  $n=10$  و  $T=4$ ، یعنی ۱۰ دارایی ریسکی، یک دارایی بدون ریسک و دوره‌های سرمایه‌گذاری نیز به صورت فصلی است. برای به دست آوردن نرخ بازده دارایی ریسکی، ۱۰ شرکت مستقر در بورس اوراق بهادار تهران، به صورت تصادفی انتخاب شدند و قیمت روزانه آنها از سال ۱۳۸۷ تا انتهای ۱۳۹۱ به مدت ۵ سال استخراج و سپس نرخ بازده فصلی آنها بصورت لگاریتمی محاسبه شد که میانگین نرخ‌های محاسبه شده در جدول شماره ۱ ارائه شده است:

جدول ۱. نرخ بازگشت دارایی ریسکی به صورت فصلی

میانگین زمستان	میانگین پائیز	میانگین تابستان	میانگین بهار	نماد شرکت
۰/۰۹۵	-۰/۰۹۸	۰/۱۰۸	۰/۱۵۷	فخوز
۰/۱۰۸۴	-۰/۰۳۵۰۶	-۰/۰۳۶۶	-۰/۰۰۸۶	رمینا
۰/۰۶۱۸۳	-۰/۰۲۲۴	۰/۰۳۱۸	۰/۰۹۸۶۴	فولاد
-۰/۰۲۲۳۲	-۰/۱۷۲۵	۰/۱۴۶۶	۰/۰۶۰۴	کروی
۰/۰۳۶	۰/۰۱۰۴۷۵	۰/۰۰۹۱۵	۰/۰۵	وبملت
۰/۰۹۳۶۸	-۰/۰۴۹۱۲	۰/۱۴۶	-۰/۱۰۳۱	اخابر
۰/۲۱۰۷۲۶	-۰/۱۶۸۴	۰/۱۳۸۸۴	-۰/۰۴۹۴۸	شکرین
۰/۰۷۴۴	-۰/۰۵۱۷	-۰/۰۲۵	-۰/۰۵۵۵۲	خزرمیاد
۰/۱۴۷۰۴	-۰/۱۶۳	۰/۱۵۳۱۲	-۰/۰۳۰۲۴	ولساپا
۰/۰۱۳۳	-۰/۰۵۴۴۶	۰/۱۳۸۰۶	۰/۰۴۲۳۸	ونوبن

منبع: یافته‌های تحقیق

مدیریت پرتفوی چنددوره‌ای همراه با کنترل ورشکستگی ... □ ۲۲۵

برای دارایی بدون ریسک، اوراق مشارکت، انتخاب مناسبی به نظر می‌رسید که طبق اطلاعات منتشر شده بانک مرکزی نرخ اوراق مشارکت ۲۰٪ سالیانه در نظر گرفته شده است که نرخ اسمی فصلی آن ۵٪ خواهد بود بنابراین:

$$r_0^0 = r_1^0 = r_2^0 = r_3^0 = 0.05 \quad (30)$$

و نهایتاً برای نرخ بهره وام بانکی، به طور متوسط نرخ بهره سالیانه ۲۴٪ در نظر گرفته شد که نرخ فصلی آن ۶٪ خواهد بود:

$$q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0.06 \quad (31)$$

سایر پارامترهای مورد نیاز هم بصورت فرضی زیر در نظر گرفته شد:

$$\omega_T = 0.2 \quad ; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1 \quad ; \quad b_1 = b_2 = b_3 = 0 \quad (32)$$

$$x_0 = 10000 \quad ; \quad l_0 = 1000$$

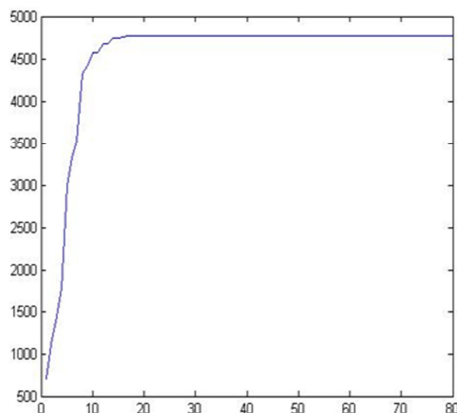
الگوریتم ژنتیک برای رسیدن به نتایج عددی مدل پیشنهاد شده است که این انتخاب به دلیل درجه پیچیدگی مدل پیشنهادی است و محیط *MATLAB* برای کد کردن این الگوریتم گزینه مناسبی بود. خروجی مدل در واقع، میزان سرمایه گذاری در دارایی ریسکی *z* ام می باشد که در جدول شماره ۲ نمایش داده می شود. به دنبال آن مقدار تابع هدف در تکرار های متوالی و در نهایت نمودار همگرایی تابع هدف را نشان می دهیم.

جدول ۲. میزان سرمایه گذاری در دارایی ریسکی *z* ام با نرخ بازگشت  $\tilde{r}_t^j$  در زمان  $t$  ( $u_t^j$ )

نماد شرکت	t=1	t=2	t=3	t=4
فخوز	۶۳۷	۶۱۶	۵۵۴	۶۲۱
رمینا	۶۵۱	۵۹۷	۵۰۶	۶۷۶
فولاد	۶۳۳	۵۴۸	۵۹۷	۵۳۸
کروی	۶۲۳	۷۴۱	۶۵۲	۵۳۲
ویملت	۶۵۵	۶۲۲	۶۳۸	۶۲۹
اخیر	۵۹۷	۶۳۷	۵۶۵	۵۷۸
شکرین	۵۳۹	۶۵۱	۶۷۵	۵۵۸
خزامیاد	۵۸۸	۶۰۴	۵۳۷	۵۱۴
ولساپا	۵۸۸	۶۰۰	۵۷۶	۶۸۲
ونوین	۶۶۰	۶۹۴	۵۶۱	۵۸۵

منبع: یافته‌های تحقیق

همانطور که در شکل نمودار ۱ نشان داده شده، الگوریتم ژنتیک در طول ۸۰ تکرار به اجرا درآمده که در مقدار تابع هدف ۴۷۷۵,۲۳ به همگرایی مطلوب رسیده است.



نمودار ۱. همگرایی الگوریتم ژنتیک در طول تکرارهای حل

منبع: یافته‌های تحقیق

به منظور بررسی کنترل ورشکستگی، از تکنیک شبیه‌سازی مونت کارلو<sup>۱</sup> استفاده شده است. فرآیند شبیه‌سازی شامل مراحل مشخصی است که بطور خلاصه می‌توان به چهار گام اساسی زیر اشاره کرد: ۱- یک مدل برای متغیرهای تصادفی مورد نظر انتخاب می‌شود و سپس پارامترهای آن مانند نوسان‌پذیری، همبستگی و نظایر آن بر اساس داده‌های تاریخی یا اطلاعات در دسترس بازار تخمین زده می‌شوند. ۲- مسیرهای شبیه‌سازی شده یا ساختگی برای متغیرهای تصادفی ساخته می‌شوند. ۳- برای اطمینان از اینکه توزیع بازده شبیه‌سازی شده پرتفوی، به اندازه کافی به توزیع واقعی آن نزدیک است، فرآیندهای شبیه‌سازی شده به تعداد کافی تکرار خواهند شد. ۴- تحلیل نتایج بدست آمده.

در این مقاله، برای بررسی کنترل ورشکستگی، شبیه‌سازی مونت کارلو با  $SN=10000$  (تعداد نمونه) اجرا شد. نتایج آن در جدول ۳ ارائه شده است.

#### 1. Mont Carlo Simulation

جدول ۳. تناوب ورشکستگی مربوط به  $MV$  و  $GMV$

دوره	$BN_t^M$	$P^M(BF_t)$	$BN_t^G$	$P^G(BF_t)$
۱	۳۶۷۱	۰/۳۶۷۱	۲۲۳۰	۰/۲۲۳۰
۲	۲۸۴۵	۰/۲۸۴۵	۴۲۲	۰/۰۴۲۲
۳	۸۸۶۳	۰/۸۸۶۳	۵۵۷۷	۰/۵۵۷۷
۴	۸۱۸۶	۰/۸۱۸۶	۵۳۲۰	۰/۵۳۲۰

منبع: یافته‌های تحقیق

$BN_t^G$  و  $BN_t^M$  = تعداد ورشکست شدن سرمایه‌گذار در دوره  $t$  در شبیه‌سازی برای

$$P(MV(w_T)) \text{ و } P(GMV(w_T, \alpha))$$

$$P^M(BF_t) = BN_t^M / SN \text{ تخمینی از فرکانس ورشکستگی برای } P(MV(w_T))$$

$$P^G(BF_t) = BN_t^G / SN \text{ تخمینی از فرکانس ورشکستگی برای } P(GMV(w_T, \alpha))$$

همانطور که در جدول شماره ۱ مشاهده می‌شود، تعداد ورشکست شدن در تمام دوره-ها، برای مدل میانگین-واریانس تعمیم یافته به مراتب کمتر از مدل میانگین-واریانس است و این امر نشان‌دهنده تأثیر کنترل ورشکستگی بر استراتژی بهینه می‌باشد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل میانگین - واریانس تعمیم یافته برای مدیریت دارایی و بدهی چند دوره‌ای همراه با کنترل ورشکستگی روی دوره‌های متوسط ارائه شد. با اینکه یک مدل پیچیده بود اما یک راه حل برای آن ارائه گردید. نمای کلی روش حل به این ترتیب است: الف) ایجاد کردن مساله لاگرانژین و مساله دوگانه لاگرانژین و مساله کمکی از مساله لاگرانژین. ب) برای بدست آوردن ضریب افزایشدهنده لاگرانژین  $u$ ، مساله کمکی برای هر پارامتر کمکی  $\lambda$ ، به وسیله‌ی رویکرد برنامه ریزی پویا بدست می‌آید. ج) پارامتر کمکی  $\lambda$ ، را به وسیله استفاده از روش ذکر شده در بخش ۳-۵ بدست آورده می‌شود و پس از آن یک حل بهینه  $u$  از مساله لاگرانژین صورت می‌پذیرد. د) تشخیص دادن اینکه

$(w, u)$  حل‌های مساله دوگانه لاگرانژین می‌باشد و پس از آن تصمیم گرفته شود که ادامه داده شود یا توقف شود. زمانی که الگوریتم توقف می‌کند،  $u$  حل بهینه از مدل میانگین - واریانس تعمیم یافته ابتدایی می‌باشد. در مدل میانگین - واریانس تعمیم یافته از نامساوی چپی شف برای جانشین کردن کنترل ورشکستگی اصلی استفاده می‌شود. اضافه کردن این محدودیت به مدل، نشان دهنده این است که سرمایه گذار مربوطه بیش از حد محافظه کار می‌باشد. با در نظر گرفتن محدودیت کنترل ورشکستگی در مدل مورد بررسی و با توجه به نتایج مثال عددی موجود در بخش چهارم، نشان داده می‌شود که کنترل ورشکستگی اثر پر معنایی روی استراتژی بهینه می‌گذارد به عبارت دیگر هنگامی که محدودیت کنترل ورشکستگی را در نظر می‌گیریم نسبت به زمانی که در نظر نمی‌گیریم بر روی استراتژی بهینه این تاثیر را دارد که تعداد دفعات رسیدن به ورشکستگی به مراتب کمتر می‌شود.

در پایان پیشنهاداتی جهت توسعه‌های آتی این پژوهش ارائه میگردد که عبارتند از: توسعه مدل ارائه شده به صورت زمان پیوسته<sup>۱</sup> در جهت افزایش کارایی مدل و در راستای مقابله با عدم قطعیت ذاتی موجود در مسائل مدیریت سبد اوراق بهادار، توصیه میشود به جای در نظر گرفتن پارامترهای قطعی برای نرخ‌ها از رویکردهای دیگری نظیر تئوری فازی در برنامه‌ریزی، برنامه‌ریزی استوار<sup>۲</sup> یا برنامه ریزی تصادفی استفاده شود.

- 
1. Continuous-Time Model
  2. Robust Optimization

## منابع و مأخذ

- Bazaraa, M.S., Shetty, C.M., (1976), *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, Wiley, Now York.
- Bielecki, T.R., Jin, H., Pliska, S.R., Zhou, X.Y., (2005), Continuous-time mean–variance portfolio selection with bankruptcy prohibition, *Math. Finance*, 15, 213–244.
- Chen, P., Yang, H.L., (2011), Markowitz’s mean–variance asset–liability management with regime switching: a multi-period model, *Appl. Math. Finance*, 18, 29–50.
- Chiu, M.C., Li, D., (2006), Asset and liability management under a continuous-time mean–variance optimization framework, *Insur. Math. Econ.*, 39, 330–355.
- Jones, T.L., Brown, J., (2009), Integrating asset–liability risk management with portfolio optimization for individual investors, *J. Wealth Manage*, 12, 51–60.
- Leippold, M., Trojani, F., Vanini, P., (2002), Multiperiod Asset-Liability Management in a Mean-Variance Framework with Exogenous and Endogenous Liabilities, *University of Southern Switzerland, Lugano*.
- Leippold, M., F. Trojani, and P. Vanini, (2004), A geometric approach to multi-period meanvariance optimization of assets and liabilities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 1079-1113
- Li, D., Ng, W.L., (2000), Optimal dynamic portfolio selection: multi period mean–variance formulation, *Math. Finance*, 10, 387–406.
- Li, Ch., Li, Zh., (2012), Multi-period portfolio optimization for asset–liability management with bankrupt control, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 11196–11208.
- Markowitz, H., (1952), Portfolio selection, *Journal of Finance*, 7, 77–91.
- Markowitz, H., (1956), The optimization of a quadratic function subject to linear constraint, *Naval Research Logistics Quarterly*, 3, 111–133,
- Markowitz, H., (1959), Portfolio selection: Efficient diversification of investments, *New York: Wiley*.
- Sadjadi, S. j., Seyedhosseini, S. M., Hassanlou, Kh., (2011), Fuzzy multi period portfolio selection with different rates for borrowing and lending, *Applied Soft Computing*, 11, 3821–3826.
- Seyedhosseini, S. M., Sadjadi, S. j., Hassanlou, Kh., (2010), New approach for multiperiod portfolio optimization with different rates for borrowing and lending, *Journal of Academy of Business and Economics*, 10.
- Seyedhosseini, S. M., Sadjadi, S. j., Hassanlou, Kh., (2010), Multiperiod portfolio selection with different rates for borrowing and lending in

presence of transaction costs, *International Journal of Industrial Engineering & Production research*, 21, 45-51.

- Seyedhosseini, S. M., Hassanlou, Kh., Rahi, M., (2011), A Stochastic Programming Model for Multiperiod Portfolio Selection with New Constraints, *Journal of Academy of Business and Economics*, 11, 224 - 230.
- Xie, S.X., (2009), Continuous-time mean–variance portfolio selection with liability and regime switching, *Insur. Math. Econ.*, 45, 943–953.
- Yi, L., Li, Z.F., Li, D., (2008), Multi-period portfolio selection for asset–liability management with uncertain investment horizon, *J. Ind. Manage. Optim*, 4, 535–552.
- Zhang, L., Li, Z., (2012), Multi-Period Mean-Variance Portfolio Selection with Uncertain Time Horizon When Returns Are Serially Correlated, *Mathematical Problems in Engineering*.
- Zhou, X.Y., Li, D., (2000), Continuous-time mean–variance portfolio selection: a stochastic LQ framework, *Appl. Math. Opt.*, 42, 19–33.
- Zhu, S.S., Li, D., Wang, S.Y., (2004), Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: a generalized mean–variance formulation, *IEEE Trans. Autom. Control*, 49, 447–457.